Doktorska disertacija Bogdana Gavrilovića

FORMIRANJE JEDNOZNAČNIH ANALITIČKIH FUNKCIJA

Ovo elektronsko-fototipsko izdanje Gavrilovićeve disertacije uradjeno je prema originalnom primerku Gavrilovićeve teze. Separat, prevod teze koji je uradio Bela Lacković i prepiska sa Arhivom Eötvös Loránd fakulteta u Budimpešti, vlasništvo su profesora Jovana Kečkića. Spomenimo da je Profesor Kečkić Gavrilovićevu disertaciju dobio na poklon od profesora Dragoslava Mitrinovića. Iz posvete na tezi vidimo da je prvobitno ovaj primerak disertacije Gavrilović poklonio Dimitriju Nešiću, prvom profesoru matematike Velike Škole u Beogradu.

Zahvaljujem se profesoru Kečkiću što mi je ustupio Gavrilovićevu disertaciju i ostale dokumente za pripremu ovog elektronsko-fototipskog izdanja.

Žarko Mijajlović

Beograd
aprila 1999.

AZ EGYÉRTÉKŰ

ANALYTIKUS FÜGGVÉNYEK

ELŐÁLLITÁSAIRÓL.

TUDORI ÉRTEKEZÉS TÁRGYÁUL VÁLASZTOTTA

GAVRILOVIĆ BOGDÁN

TANÁRJELÖLT.

BUDAPEST, 1886.

HORNYÁNSZKY VIKTOR KÖNYVNYOMDÁJA

(A M. T. AKADÉMIA ÉPÜLETÉBEN.)

Врло поштованом

Господину Димитрију Нешићу
професору Велике Школе

са особитим поштовањем

Београд 1/VII. 1886.

Стиаде

Muczavo Cat.

to

AZ EGYÉRTÉKÜ

ANALYTIKUS FÜGGVÉNYEK

ELŐÁLLITÁSAIRÓL.

TUDORI ÉRTEKEZÉS TÁRGYÁUL VÁLASZTOTTA

GAVRILOVIĆ BOGDÁN

TANÁRJELÖLT.

BUDAPEST, 1886.

HORNYÁNSZKY VIKTOR KÖNYVNYOMDÁJA

(A M. T. AKADÉMIA ÉPÜLETÉBEN.)

(*Nyomatott a Tököly-féle intézet költségén.*)

Egy tekintetet vetve az egész függvénytan történelmi fejlődésére, látni fogjuk, hogy épen azon része, a melyről részben ez értekezésben is lesz szó, vonzotta magához a legkiválóbb gondolkozókat a tiszta mennyiségtan terén.

Nem áll szándékunkban fölsorolni mindazon tudósokat vagy pedig azok valamennyi dolgozatát — úgy emezek, mint amazok száma nagy — de mégis fel kell említenünk egy értekezést, mely Cauchy és Riemann alapvető munkálkodása után, a berlini tudományos akadémia közlönyében megjelent és úgy szólván a függvénytanban uj irányt alkotott.

Ez Weierstrass, a berlini egyetem hires tanárának, egy értekezése,[1] melyben az *„egyértékű analytikus függvények elméletét“* új módon tárgyalja. Weierstrass ugyanis elmélkedésében egészen eltér az eddig használt módszerektől, a mennyiben elmélete kifejtésében csaknem kizárólag elemi móddal él. Vajjon ez alkalmas módszer-e, vagy nem, az nem tartozik ide — mi csak ama nagyszerű eredményre tekintünk, melyet az fölmutatott és miről ama értekezések nagy száma is tanuskodik, melyek Weierstrass nézete alapján ezen aránylag rövid idő alatt megjelentek.

[1] *Weierstrass.* Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. 1876.

Ezen dolgozatok közül különösen kitűnnek Mittag-Leffler értekezései,[1] mely gondolkodásában még tovább megy Weierstrass-nál; mert míg ez az analytikus függvény alakját mutatja fel, melynek véges számú lényeges és végtelen számú lényegtelen singularitása van, — ez értekezésének culmináló pontja — addig Mittag-Leffler azon függvények alakját is adja, a melyek általában végtelen sok singularitással birnak, bármilyen természetűek is legyenek ezek.

Ez értekezésben az egyértékű analytikus függvények előállításairól isolált singuláris pontok környékében lesz szó.

Jobb áttekintés kedvéért ez értekezést két részre osztottam, melyek közül az első — a szabályos függvények és a singuláris pontok fogalmát adván — a második számára késziti elő az alapot, mely második rész épen a fent nevezett feladattal foglalkozik.

A kitűzött feladat megfejtésénél kétféleképen járunk majd el — a függvényeket hatványsorok összege vagy szorzata gyanánt tüntetve fel.

Az analytikus függvények ilyen módon való előállításával találkozunk először Weierstrass említett értekezésében, de a mint mondottuk, elemi módon kidolgozva. Guichard[2] kimutatta, hogy valamennyi függvény előállítható hatványsorok szorzata által, dolgozatában a felsőbb analysis műveleteit használva fel. Az út azonban, melyen azt következteti, nem egy s ugyanaz, a minek tulajdoníthatjuk is ama hosszadalmas eljárást, melyet egy végtelen sok singuláris ponttal biró függvény előállításában követ.

[1] Ezek a következő közleményekben jelentek meg: 1. Comptes rendus de l'Académie des Sciences: Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. 1882. és 2. Acta Mathematica: Sur la représentation analytique des fonctions monogénes uniformes d'une variable indépendante 1884.

[2] *Guichard:* Théorie des points singuliers essentiels. Paris, 1883.

Mi, mind ennek, mind pedig véges számú singuláris ponttal biró függvény szorzat alakjában való előállításánál, mindig azon elvhez — melyet majd egyszerű okoskodással bizonyítani fogunk — ragaszkodunk, mely szerint egy analytikus függvény logaritmikus deriváltjának integrál-maradéka mindig egész szám.

Fölemlítjük még, hogy ez értekezés kidolgozásánál az említett forrásokon kivül még a Jordan[1] és Hermite[2] kitünő műveit használtuk, a többieket más kellő helyen adjuk elő.

Budapesten, 1886. évi április hó 1-én.

[1] *Jordan.* Cours d'analyse de l'école polytechnique. Paris, 1882.

[2] *Hermite.* Cours, professé pendent le 2-ième semestre. Paris. 1881—2.

A szabályos függvényről és a singuláris pontokról.

1. Mielőtt még a szabályos függvény fogalmát adnók, szükséges lesz oly tétellel megismerkednünk, a mely az egész tárgyalásunknak majdnem minden fejtegetésénél elő fog fordulni. Ez igen fontos, Cauchytól eredő tétel, a mely úgy szólván az egész függvénytan alapját képezi.

Fölveszünk ugyanis egy oly függvényt, a mely egy egyszeresen összefüggő [1] területen belül bizonyos $z = u + iv$ complex változónak folytonos, véges és egyértékü függvénye. Ha már most ezen terület egy tetszésszerinti pontja x, úgy világos, hogy

$$\frac{f(z)}{z - x}$$

függvény is, hasonlóan mint $f(z)$ is az egész területen analytikus[2], kivéve a $z = x$ pontot, melyben végtelen nagy értékkel bir. Ezen pont, mint középpont körül egy tetszés-

[1] *Riemann.* Gesam. Werke: Grundlagen für eine allg. Theorie der Funktionen einer complexen Grösse. Ez értekezésben az egyszeresen és többszörösen összefüggő területnek fogalmát találhatjuk, még pedig: egyszeresen összefüggő azon terület, a melyben minden zárt s vonal magában véve egy területrésznek teljes határát képezi. Egy ily terület tehát egy metszettel megint két egyszeresen összefüggő területrészre bomlik fel.

[2] Némely irók egy függvényt csak akkor neveznek *analytikusnak*, a mikor ez folytonos, véges, határozott értékű; e szerint egy analytikus függvény végtelenjeiről szólni sem lehetne. Mi pedig a függvény ily elnevezése mellett mindig egy oly függvényt fogunk

szerinti kis sugárral biró c kört irunk, mi által oly terület keletkezik, mely két görbe vonal (contour) által meg van határolva. Ezen terület minden pontjában már a fölirt hányados is analytikus lévén, irhatjuk a függvénytan egyik igen ismeretes tételének értelmében,

$$(1) \qquad \int_s \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

hol az integrálok a területre nézve positiv irányban (le sens direct) vannak véve, azaz úgy, hogy a bezárt terület mindig balra essék, ha az integrationális görbék mentében haladunk.

Határozzuk most a c körre vonatkozó integrál értékét. A z pont nem lévén más, mint ezen kör kerületének egyik pontja, irhatjuk

$$z - x = re^{\varphi i},$$

vagy differentiálása után

$$dz = rie^{\varphi i}\,d\varphi.$$

A keresett integrál értéke tehát ez lesz:

$$\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-x} = i\int_0^{2\pi} f\left(x + re^{\varphi i}\right)\,d\varphi.$$

Mivel pedig a fölvett függvény $z = x$ pont környékében folytonos, r-et oly kicsinynek választhatjuk, amint akarjuk, vagy más szóval mehetünk az x pont természetes

érteni, a mely a sík egyes részeiben folytonos, véges, határozott értékű ugyan, de a mellett még bizonyos pontokban — melyek egymástól elválva vannak — még végtelen nagy vagy határozatlan értékkel is bir. — Philosophiai szempontból tulajdonképen csak azon függvény analytikus, mely az analysis eszközei által definiálható.

határáig. Ilyen körülmények között pedig φ-nek minden értékére nézve

$$\lim_{r=0} f\left(x + re^{\varphi i}\right) = f(x);$$

áll tehát, hogy

$$\int_c \frac{f(z)\,dz}{z - x} = i\, f(x). \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.\, f(x),$$

s tekintetbe véve az (1) alatti egyenletet

$$(2) \qquad \int_s \frac{f(z)\,dz}{z - x} = 2\pi i.\, f(x).$$

Ezen relatio pedig azt mondja: hogy ha egy görbe mentében ismerjük egy oly f (z) függvény értékeit, mely az illető görbe által bezárt területen belül analytikus, akkor a megadott függvény egy tetszésszerinti, ezen területen belül levő argumentumához tartozó értékét egy határozott integral értéke által számíthatjuk ki.

Nagyon egyszerűen arról is meggyőződhetünk, hogy ezen integrál értéke még zérus is lehet, mert, ha az x pont az s által bezárt területen kivül eső részében volna, úgy

$$\frac{f(z)}{z - x}$$

hányados a terület belsejének minden egyes pontjára nézve analytikus lévén, Cauchy leghíresebb tételeinek egyike szerint

$$\int_s \frac{f(z)\,dz}{z - x} = o.$$

Igy tehát a (2)-ben foglalt integral értéke lényegesen függ az x pont helyzetétől s ezt tekintetbe véve ezen tételt mondhatjuk ki:

Ha a complex változó függvénye bizonyos s görbe vonal által bezárt területen belül analytikus és x a függvény argumentumának tetszésszerinti értéke, úgy

$$\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-x} = 2\pi i.\, f(x) \text{ vagy } 0,$$

a szerint, a mint a fölvett x pont a bezárt terület belsejében vagy külsejében van.

2. Ezen tétel fölhasznalása mellett nagyfontosságú, alapvető eredményekhez juthatunk. Mivel az s görbe vonal alakja tetszésszerinti, úgy ezt egy oly a középponttal biró körnek vehetjük, melynek területébe az x pont is esik. De

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\left[1 + \frac{x-a}{z-a} + \right.$$

$$\left. + \frac{(x-a)^2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n-1}(z-x)}\right]$$

lévén, irhatjuk, hogy

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-x} = A_0 + A_1(x-a) + \ldots$$

$$+ A_{n-1}(x-a)^{n-1} + R,$$

hol általában

$$A_\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{\mu+1}} \quad \text{és} \quad R = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{(x-a)^n f(z)\,dz}{(z-a)^n(z-x)}.$$

Ámde az a a kör középpontja, x pedig a kör belsejének egyik pontja, tehát minden x-re nézve áll

$$\mathrm{mod}\,(x-a) < \mathrm{mod}\,(z-a)$$

és

$$2\pi i.\,\mathrm{mod}\,\mathrm{R} \overset{=}{<} \mathrm{mod} \int_s \frac{(x-a)^n f(z)\,dz}{(z-a)^n (z-x)}.$$

Ezen utóbbi egyenlőtlenség pedig elenyészik, ha $n = \infty$ vétetik.

Ugyanis tegyük föl, hogy az $f\,(z)$ módulusának legnagyobb értéke a kör kerületén M; az $(x-a)$ és $(z-a)$ pontok modulusait pedig r_1 gyel, illetőleg r-rel jelöljük, úgy

$$2\pi i.\,\mathrm{mod}\,\mathrm{R} \overset{=}{<} \int_s \frac{\mathrm{M} r_1^n\, ds}{r^n (r - r_1)} \overset{=}{<} \frac{2\pi r.\,\mathrm{M}}{r - r_1} \left(\frac{r_1}{r}\right)^n,$$

mely kifejezés már nyilván $n = \infty$-re nézve zérussal egyenlő, mert az M nem lehet végtelen nagy, — $f\,(z)$ még az s vonal mentében is analytikus lévén, — $\left(\frac{r_1}{r}\right)$ pedig valódi tört, mely zérus felé convergál, ha $n = \infty$ lesz.

Az (1) alatt lévő sor tehát a végtelenig folytatható mindaddig, mig az x pont az s vonal által bezárt területben fekszik; a sor alakja pedig e következő:

$$(2) \quad f(x) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\,(x-a) + \mathrm{A}_2\,(x-a)^2 + \ldots\ldots,$$

hol az A_μ általános együttható x-től független integrál által definiálva van.

Mind azon pontokról, melyek a fölirt sornak megfelelnek, azt mondjuk, [1] hogy az „a pont környékében“ vagy „szomszédságában vannak. Az x azonban ezen környékben

[1] *Weierstrass.* Monatsberichte der Königl. Akad. der Wissenschaften: Zur Functionentheorie. 1880. August.

végtelen sok értéket vehet föl, melyeket rendre x_1, x_2, ... x_n, ... által jelölhetünk; e szerint ezen pontok környékéről is szólhatni.

Ha az a környékéhez tartozó pontok összességét A-val jelöljük, úgy egy tetszésszerinti x_i pont környéke tartozik az A-hoz, ha ezen pont környékében lévő pontok, mind az A-ban vannak, azaz ha

$$\text{mod}\,(x—x_i) = r_i$$

olyan, hogy az r_i által x_i körül leirt kör kerülete túl nem lépi az a körül irt kör kerületét. Ilyen pontok környékeire nézve pedig a függvény fent irt alakja mindig fennáll, a mi annyit tesz, hogy az A-ban lévő tetszésszerinti x_i pontra nézve a megadott függvény $(x—x_i)$-nek positiv egész hatványai szerint haladó végtelen sorba fejthető.

Igy megadván egy pont környékének a fogalmát, mondhatjuk, hogy mindazon függvény, a mely oly tulajdonságú, hogy egy tetszésszerinti a pont környékében $(x—a)$-nak positiv, egész hatványai szerint sorba fejthető, ebben a pontban *szabályos* (regulär, regulière) függvény; az a pedig ezen függvény *rendes* (regulär, ordinaire) pontja.[1]

Ha ezen a pont a végtelenben van és egyszersmind a függvény rendes pontja, úgy azon ismert criterium szerint,[2] mely egy rendes pont létezéséről szól, a (2) alatti sorba $(x—a)$ helyebe $\frac{1}{x}$-et irván, megkapjuk a függvény alakját egy végtelen pont környékében. Ugy a függvény alakját ismerjük a sik akármelyik pontjában, ha benne $f\,(x)$ szabályos.

3. Azonban az analytikus függvény természeténél fogva a végtelen síkon oly pontokkal is találkozunk, melyekre

[1] *K. Weierstrass.* Abhandlungen der Berl. Akad. der Wissenschaften: Zur Theorie der eindeutigen anal. Functionen. 1876.

[2] *Königsberger, Dr. Leo*: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. 1. Theil. 116. p. Leipzig, 1874.

nézve nem találhatni egy oly környéket, melyben $f(x)$ $(x-a)$-nak posítiv, egész hatványai szerint haladó sor által volna előállítható. Ilyen pontok a függvény *singuláris* pontjainak (les points singuliers ou critiques) neveztetnek.

Látni fogjuk, hogy *egy* ilyen pont környékében a függvény általános alakja ez:

$$(1)\quad f(x) = G(x) + G'\left(\frac{1}{x-a}\right),$$

hol $G(x)$ egy az a pontban szabályos függvény alakjával bir, $G'\left(\frac{1}{x-a}\right)$ pedig, mely tulajdonképen a singuláris pont létezéséről tanuskodik, ily alakú:

$$(2)\quad G'\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \cdots\cdots$$

Ha az utolsó kifejezés jobb része véges számú tagokból áll, az a pont a függvény *lényegtelen singuláris* pontja vagy *polusa*; ha pedig a sor a végtelenig folytatható, úgy az a függvény *lényeges singuláris* pontja.

A singuláris pontok nemére tehát a $G'\left(\frac{1}{x-a}\right)$ függvény alakja jellemző; de megfordítva is a singuláris pontok száma és azok természete a függvény osztályozásának alapját képezik.

Tegyük föl most, hogy a a függvény lényegtelen singuláris pontja. Ha ez áll, úgy a mondottak értelmében, az (1) alatt álló kifejezés így irható:

$$f(x) = G(x) + \frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(x-a)^n}.$$

Szorozzuk ezen egyenlet mind a két részét $(x-a)$-nak n-edik hatványával és vigyük véghez a kellő műveleteket, úgy

$$(3)\qquad (x-a)^n f(x) = F(x)$$

kifejezést kapunk, melyben $F(x)$ egy az $(x-a)$-nak positiv egész hatványai szerint haladó sor, azaz egy az a pontra nézve szabályos függvény.

Ebből még a lényegtelen singuláris pontra nézve egy más definitió is következik; mert az utolsó kifejezésből még azt is látjuk, hogy ha az $f(x)$ egy szabályos függvénynyé $(x—a)$ bizonyos positiv n-edik hatványának való szorzása által átalakitható, úgy az a a függvény egy lényegtelen singuláris pontja, még pedig n-szeres polusa.

Hasonlóképen járhatunk el akkor is, ha a függvény lényegtelen singuláris pontjainak a száma m; ha ezen pontokat általában a_μ-vel jelöljük, a megfelelő rendet pedig k_μ-vel, azt nyerjük, hogy

$$f(x) . \prod_{\mu=1}^{m} (x—a_\mu)^{k_\mu} = \mathrm{F}(x)$$

mely kifejezés jobb része már az a_μ pontok valamelyikében szabályos függvény.

Ezen kifejezésnek helyessége hamar kiderül, ha csak a (3) alatt álló relátióhoz fordulunk. Mert az

$$(x—a_1)^{k_1} \overset{i}{f}(x) = \mathrm{F}_1(x)$$

oly függvény, melyre nézve a_1 már nem singuláris pont.

Hasonlóképen az

$$(x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} . f(x) = \mathrm{F}_2(x)$$

oly kifejezés, melyben sem a_1, sem a_2 nem singularitások.

Igy tovább is okoskodva belátjuk, hogy az $f(x)$ csakugyan oly alakban irható, a mint ezt be is mutattuk.

Ugyanazon (3) kifejezésből még más következtetéseket is vonhatunk.

Ha ugyanis egy tetszésszerinti $\varphi(x)$ függvény egyenlő $f(x)$-nek reciprók értékével, mely $f(x)$ nek $x=a$ pont n-

szeres polusa, akkor ugyanezen a pont még a $\varphi(x)$ függvénynek n-szeres zéróhelye; mert

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{(x-a)^n}{F(x)},$$

tehát

$$(4) \qquad \varphi(a) = \lim_{x=a} \left[\frac{(x-a)^n}{F(x)}\right] = 0,$$

$F(x)$ véges értékü lévén $x=a$ pontban.

Ebből pedig még az is következik, hogy ha valamely $f(x)$ függvénynek bizonyos s zárt vonal által bezárt területben n számú zéróhelye és m számú lényegtelen singuláris pontja van, úgy az e következő alakban irható:

$$(5) \qquad f(x) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n} (x-b_\nu)^{l_\nu}}{\prod_{\mu=1}^{m} (x-a_\mu)^{k_\mu}} \cdot G(x),$$

mely kifejezésben l_ν a b_ν zéróhelynek, k_μ pedig az a_μ lényegtelen singuláris pontnak megfelelő rendszám, $G(x)$ pedig x-nek oly függvénye, melynek az s vonal belsejében sem zéróhelye, sem pedig polusa nincsen.

Az előbbiekből tudjuk, hogy

$$(6) \qquad f(x) = F(x) \cdot \prod_{\mu=1}^{m} (x-a_\mu)^{k_\mu}$$

oly függvény, melynek m számú lényegtelen singularitása van.

Mivel pedig $\prod_{\mu=1}^{m}(x-a_\mu)^{k_\mu}$ nem foglal magában egyetlen egy zérót sem, kell, hogy a mi esetünkben az F(x) oly függvény legyen, melynek zéróhelyei az s általi bezárt területben mind összeesnek az f (x) függvény záróhelyeivel, azaz kell, hogy

$$F(x)=\prod_{\nu=1}^{n}(x-b_\nu)^{l_\nu}\,.\,G(x)$$

Ez pedig világos; mert

$$F(x)=(x-b_1)^{l_1}\,.\,G_1(x)$$

kifejezés azt mondja, hogy az F (x)-nek b_1 egy l_1-edrendü zéróhelye. A G$_1$ (x) függvénynek $x=b_1$ már nem lehet zéróhelye, mert ez ellenkezném azon állításunkkal, hogy F (x)-ben l_1 a b_1 pont rendszáma; G$_1$ (x) tehát oly függvény, mely csak az argumentum b_2, b_3, . . . b_n értékeire elenyészik.

E szerint irhatjuk, hogy

$$G_1(x)=(x-b_2)^{l_2}\,.\,G_2(x)\,,$$

hol hasonló módon G$_2$ (x)-nek zéróhelyei csak a b_3, ... b_n pontok.

Igy tovább is folytathatjuk az okoskodást s végre egy

$$G_{n-1}(x)=(x-b_n)^{l_n}\,.\,G(x)$$

kifejezésre jutunk, mely csakis $x=b_n$ értékre nézve elenyészik.

Ha az így nyert kifejezések sorából a $G_{n-1}(x)$, $G_{n-2}(x), \ldots, G_2(x), G_1(x)$ függvényeket elimináljuk, azt kapjuk, hogy

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - b_\nu)^{l_\nu} \; G(x),$$

mely kifejezés (6)-ba való helyettesítése megadja az (5) alatt fölhozott alakot és ezzel egyszersmind állításunkat is bizonyítja.

Föltéve, hogy megint egy $\varphi(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ függvény létezik, irhatjuk (5) szerint, hogy

$$\varphi(x) = \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (x - a_\mu)^{k_\mu}}{\prod_{\nu=1}^{n} (x - b_\nu)^{l_\nu}} \cdot \frac{1}{G(x)},$$

miből egyrészt az következik, hogy $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvények oly tulajdonságuak, hogy az egyiknek lényegtelen singuláritásai összeesnek a másiknak zéróhelyeivel és megfordítva, másrészt pedig azt is látjuk, hogy

$$\lim_{x=a_\mu} [f(x)] = \infty \quad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

azaz, hogy egy lényegtelen singuláris pontban a függvény értéke végtelen nagy.

Hogy egy lényeges singuláris pontra nézve ezek a következtetések nem állanak, kitünik már ilyen pont definitiójából; ennek értelmében ugyan nem található oly positiv, véges n számot, melyre a (3) alatt álló kifejezés ugyanazon mellékmeghatározások mellett állana. Egy ilyen pont természetes határában egy tetszésszerinti értéket fölvehet.[1]

Végre még az is világos, hogy ha $x = a$ az $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, függvények közül egyikre nézve sem lényeges singularitás, akkor bármely rationális kapcsolatukra nézve sem lehet lényeges singularitás.

Ezen állításnak helyessége rejlik mindössze a következő három tételben:

Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ közül egyikre nézve sem lényeges singularitás az $x = a$, akkor

1. összegükre vagy különbségükre;
2. szorzatukra;
3. bármelyiknek reciprók értékére sem lehet $x = a$ pont lényeges singularitás.

Ezen tételek helyessége úgyszólván szembetünő, mert csakis rationalis műveletek végzésében áll, azért ezt nem is mutatjuk be.

Megemlítjük még, hogy mi a függvényeket csakis az elsőosztályú singuláris pontok környékében elő fogjuk állítani, azaz oly pontok körül, melyek egymástól *elkülönítve* (les points isolés) vannak. Ilyen pontok környékében tehát más singuláris pontok nem léteznek.[2]

Az analytikus függvények különböző előállításairól.

1. Megadván a singuláris pontok természetére vonatkozó, szükséges megállapodásokat, áttérünk a tulajdonképeni czélunkra. Meg fogjuk mutatni, hogy az egyértékű

[1] *Höldler:* Math. Ann. Bd. 20. Eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlichen singulären Stelle etc.

[2] *Mittag-Leffler.* Comptes rendus. 1882. Sur la thèorie des fonctions uniformes d'une variable. Mittag-Leffler a singuláris pontokat *két nemre* (points singuliers de première et de deuxième genre.)

analytikus függvények singuláris pontok környékében e következő módon állíthatók elő:

I. Ha a függvénynek csak egy singularitása van, akkor az $f(x)$ általános kifejezése ez:

$$f(x) = G(x) + G'\left(\frac{1}{x-a}\right),$$

vagy

$$f(x) = G(x) \,.\, G'\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

II. Ha a függvénynek az egész síkon véges számú singularításai vannak, úgy az általános alakja ez:

$$f(x) = G(x) + \sum_{\mu=1}^{m} G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$$

vagy

$$f(x) = G(x) \,.\, \prod_{\mu=1}^{m} G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)(x-a_\mu)^{m_\mu}.$$

III. Ha azonban a függvénynek végtelen sok singulárítása van a végtelen sík mentében, úgy az általános kifejezése ez:

$$f(x) = G(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[P_\nu(x) + G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\right],$$

vagy

$$f(x) = G(x) + \prod_{\mu=1}^{\infty}(x-a_\mu)^{m_\mu} G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) . e^{P_\nu(x)}$$

osztja. Minden singuláris pont, melynek környékében az elsőosztályú pontok végtelen nagy számban vannak meg, a singuláris pontok *második osztályát* képezi és így tovább. Ily pontok összessége megadja az *elsőnemű singuláris* pontokat, a többiek pedig, melyeknek természete ezektől elütő — a singuláris pontok vagy egy vonal mentében vagy a sík egyes részében vannak — képezik a *másodnemű singuláris* pontokat.

Ezen kifejezésekben G (x)-nek alakja megegyezik egy szabályos függvény alakjával; $G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$ pedig az a singuláris pont jellemző függvénye és véges vagy végtelen sort képvisel a szerint, a mint a_μ lényegtelen vagy lényeges singularitás. Ezen G_μ függvények még a singuláris pontok számát is megadják, mert minden egyes G_μ által csak egyetlen egy singuláris pont definiálva van.

Ha ezen alakok közül a II. alattiak elsejét vesszük tekintetbe, úgy egy igen fontos fogalomra jutunk, mely Cauchytól [1] származik és a singuláris pontok *integrálmaradékairól* (le résidu) szól.

Fölveszünk ugyanis egy $f(x)$ függvényt, mely az s vonal belsejében mindenütt analytikus, kivéve az $a_1, a_2, \ldots a_m$ pontokat. Ily föltételek mellett pedig Cauchy szerint

$$(1)\qquad \int_s f(x)\,dx = \int_{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_m} f(x)\,dx,$$

hol általában c_μ az a_μ pontot körülvevő, ρ_μ sugárral biró kör kerületét jelenti.

Igy állván a dolog, könnyen határozhatjuk meg azon integrálok értékeit, melyeknél az integrationális vonal az a_μ pontot bezáró c körkerület. Tudván, hogy

$$G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) = \frac{A_{1\mu}}{x-a_\mu} + \frac{A_{2\mu}}{(x-a_\mu)^2} + \ldots$$

véges vagy végtelen, de egyenletesen convergens sorba fejt-

[1] *Cauchy* Comptes rendus. 1855. Mémoire sur les variations intégrales des fonctions.

hető, áll a II. alatt bemutatott alakok elsejének (1)-be való helyettesitése után, hogy

$$\int_s f(x)\,dx = \int_{c_1} \mathrm{G}(x)\,dx + \int_{c_2} \mathrm{G}(x)\,dx + \ldots + \int_{c_m} \mathrm{G}(x)\,dx$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_1} \mathrm{G}_\mu \left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) dx + \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_2} \mathrm{G}_\mu \left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) dx + \ldots$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_m} \mathrm{G}_\mu \left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) dx.$$

Mivel pedig G (x) a c körök akármelyikében analytikus, azért az első m integrál értéke zérussal egyenlő; hasonlóképen a Σ alatt lévő m integrál közűl szám szerint (m—1) elenyészik és csak az marad fenn, a melyben c-nek indexe az a indexével megegyezik.

Irhatjuk tehát

$$\int_s f(x)\,dx = \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_\mu} \mathrm{G}_\mu \left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) d\,x$$

vagy ha

$$\sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{G}_\mu \left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\mathrm{A}_{1\mu}}{x-a_\mu} + \sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{G}'_\mu \left(\frac{1}{x-a_\mu}\right).$$

irunk, hol

$$\mathrm{G}'_\mu \left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) = \frac{\mathrm{A}_{2\mu}}{(x-a_\mu)^2} + \frac{\mathrm{A}_{3\mu}}{(x-a)^3} + \ldots.,$$

úgy még

$$(2) \int_s f(x)dx = \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_\mu} \frac{A_{1\mu}\, dx}{x - a_\mu} + \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_\mu} G'_\mu \left(\frac{1}{x - a_\mu}\right) dx.$$

De

$$x - a_\mu = \rho_\mu\ (\cos\alpha_\mu + i\ \sin\alpha_\mu),\ dx = i\ .\ \rho_\mu\ (\cos\alpha_\mu +$$

$$i\ \sin\alpha_\mu)\ d\alpha_\mu,$$

tehát

$$\sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_\mu} \frac{A_{1\mu}\, dx}{x - a_\mu} = \sum_{\mu=1}^{m} A_{1\mu} \int_0^{2\pi} d\alpha_\mu = 2\pi i. \sum_{\mu=1}^{m} A_{1\mu},$$

de még a (2)-ben a második Σ jel alatt lévő integrálok mind elenyésznek, mert az integrálás positiv irányban van véve és azonkívül a G' függvény valamennyi tagja ugyanazon értékeket veszi föl az $\alpha = o$-ban és $\alpha = 2\pi$-ben. Lesz tehát

$$\int_s f(x)\, dx = 2\pi i. \sum_{\mu=1}^{m} A_{1\mu}.$$

Az $A_{1\mu}$ együttható $f(x)$-nek az a_μ pontra vonatkozó *integrálmaradéka*. Mondhatjuk tehát, hogy, a mikor bizonyos zárt s vonalon belül m számú singuláris pont van, úgy $\int_s f(x)\, dt$ nem más, mint az ezen singuláris pontokra vonatkozó integrálmaradékok összegének $2\pi i$-vel való szorzata.

Megjegyezzük még, hogy egy egyértékű analytikus függvény logaritmikus deriváltjának integrálmaradéka mindig positiv vagy negativ egész szám, s ezt majd későbben be is bizonyítjuk.

2. Menjünk most a kitűzött czélunkhoz és mutassuk ki, hogy a singuláris pontok környékében $f(x)$-et analytikailag csakugyan úgy állíthatjuk elő, a mint ezt ezen fejezet kezdetén az I., II. és III. alatt megjelöltük.

A legegyszerűbb esetből indulunk ki, fölteszszük tehát, hogy a függvénynek csak egy singuláris pontja van. Ha ezen pont körül, melyet a-val jelölünk, két concentrikus kört irunk és ha ezen körök által képezett gyűrűnek x egy tesztésszerinti pontja, úgy a függvény ebben a pontban két sorba fejthető, mely sorok egyike $(x-a)$-nak positiv, másika $(x-a)$-nak negativ hatványai szerint halad.

Legyen e végre ezen concentricus körök közűl s a külső, c a belső, σ pedig megint egy végtelen kis sugárral biró kör, mely az x pontot magában foglalja; mivel

$$\frac{f(z)}{z-x}$$

függvénynek analytikai volta csak a $z=x$ és $z=a$ pontokban szűnik meg, azért irhatjuk, hogy

$$\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_\sigma \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

De egy előbbi tételünk szerint

$$\int_\sigma \frac{f(z)\,dz}{z-x} = f(x).\,2\pi i;$$

e szerint az előbbi egyenletet így is irhatjuk:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Ha z-t az s kör kerületén fölveszünk, a körgyűrű minden pontja

$$\mathrm{mod}\,(x-a) \angle \mathrm{mod}\,(z-a)$$

relátiónak fog megfelelni, melyből azt látjuk, hogy $\frac{1}{z-x}$ törtet egy convergens sorba lehet fejteni, mely sornak alakja ez:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(z-a)^3} + \ldots;$$

ha pedig z a c kör kerületén van, akkor minden x-re nézve

$$\mathrm{mod}\,(z-a) \angle \mathrm{mod}\,(x-a),$$

s ennél fogva

$$-\frac{1}{z-x} = \frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(x-a)^3} + \ldots\ldots$$

Helyettesítvén már most ezen sorokat az $f(x)$ kifejezésébe, azt kapjuk, hogy

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots.$$

$$+ \frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \ldots,$$

mely kifejezés jobb oldalán lévő együtthatók általános alakja e következő:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad B_n = \int_c (z-a)^{n-1}\,.\,f(z)\,dz\,.$$

Ezen sorok elsejét $G(x)$-el, másikát pedig $G'\left(\frac{1}{x-a}\right)$.

val jelölvén, azt látjuk, hogy a függvénynek analytikai előállítása csakugyan

$$f(x) = G(x) + G'\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

kifejezés, mely egyszersmind az I. alakok elsejével is tökéletesen megegyezik.

Ha a G' függvény valamennyi együtthatója elenyészik, úgy $f(x)$ az s körön belül mindenütt egy analytikus függvény jellemével bir.

A függvény ezen utolsó kifejezéséből még az is következik, hogy minden függvény, a mely egy körgyűrűben analytikus és a mellett csak egy singuláris ponttal bir, előállítható két sor szorzata gyanánt, mely sorok közűl az egyik $(x-a)$-nak positiv, a másik ennek negativ hatványai szerint halad.

Ha ugyanis $F(x)$ a körgyűrűben n számú zéróhelylyel bir, akkor az előbbiek szerint irhatjuk

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x-b_\nu)^{l_\nu} f(x),$$

hol $f(x)$ derivált függvényével együtt a körgyűrűben szintén analytikus, és mivel $f(x)$-nek nincs egyetlen egy zéróhelye sem a körgyűrűben, azért még a logaritmikus deriváltjának singularitásai ugyanazok mint az $F(x)$ singularitásai. Irhatjuk tehát, hogy

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \dots$$

Ezen kifejezés jobb oldalán lévő sorok egyenletesen convergensek, szabad tehát ezeket tagonként integrálni s így

$$l\,f(x) = C + A_0\,(x-a) + \tfrac{1}{2}\,A_1\,(x-a)^2 + \ldots$$
$$+ B_1\,l\,(x-a) - \frac{B_2}{x-a} - \ldots,$$

vagy

$$l\,f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n\,(x-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'_n}{(x-a)^n} + B_1\,l\,(x-a);$$

de B_1 együttható nem más, mint egy logaritmikus deriváltnak integrálmaradéka, melyet majd m-el jelölni fogunk; előáll tehát az utolsó kifejezés kellő átalakítása után

$$f(x) = e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A'_n\,(x-a)^n} \cdot e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{B'_n}{(x-a)^n}} \cdot e^{m l\,(x-a)}$$

Ebből a kifejezésből már azt látjuk, hogy egy logaritmikus deriváltnak integrálmaradéka egész szám; mert ha m tört volna, akkor az $f(x)$ ezen utolsó alakjából következtethetnők azt, hogy az polydrom függvény, mi a föltevésünkkel ellenkeznék. Ezt már most egyszer és mindenkorra bebizonyítottnak tekinthetjük.

Ezt megjegyezvén látjuk még, hogy az utolsó kifejezés jobb oldalának szorzói közűl az első $(x-a)$-nak positiv, a másik ennek negativ hatványai szerint haladó, convergens sorba fejthető, a harmadik pedig $(x-a)$-nak m-edik hatványával egyenlő.

E szerint tehát egy oly analytikus függvénynek, melynek csak egy singuláris pontja van, még ez is analytikai előállítása:

$$f(x) = G(x) \cdot G'\left(\frac{1}{x-a}\right) \cdot (x-a)^m,$$

mely alak már magában foglalja az I. alatt lévő alakok másodikát; mert ha m positiv, úgy $(x-a)^m$-et $\mathfrak{G}(x)$-el, ha pedig negativ $\mathfrak{G}'\left(\frac{1}{x-a}\right)$-val szorozhatjuk; ez által pedig az $(x-a)^m$ tényezőtől a fennt irt kifejezést megszabadítottuk.

3. Az előbbi czikk eljárását tovább is követve, gyorsan juthatunk egy oly függvény előállításához, melynek bizonyos zárt s vonal belsejében végesszámú singuláris pontjai vannak. Legyenek ezek $a_1, a_2, \ldots a_m$, úgy, az s által bezárt területen meg egy x pontot véve, irhatjuk

$$\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \sum_{\mu=1}^{m} \int_{c_\mu} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

ha c az x, c_μ pedig az a_μ pontot bezáró kört jelenti, melynek sugara legfeljebb a legközelebb eső c kör kerületéig terjed.

Ezen egyenlet jobb oldalának első integrálja $2\pi i$. $f(x)$-el egyenlő; e szerint

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu=1}^{m}\int_{c_\mu} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Keressük most hasonlóképen ezen kifejezésben foglalt integrálok analytikai kifejezését!

Az s-nek belsejében egy oly a pontot fölveszünk — mely pont különben $f(z)$-nek rendes pontja — hogy

$$\mathrm{mod}\,(z-a) \gtrless \mathrm{mod}\,(x-a)$$

legyen a szerint, a mint a z az s-en vagy a singuláris pontokat bezáró körök kerületén van véve. Az első esetben $\frac{1}{z-x}$ törtet $(x-a)$-nak positiv, a másodikban pedig ennek negativ hatványai szerint haladó convergens sorba fejthetjük. Ha ezen műveleteket véghez visszük, hasonló eljárást használva, mint a milyent az utolsó czikkben alkalmaztunk, és ezen műveletek eredményét utolsó egyenletünk első, illetőleg második integrandusába teszszük, $f(x)$-re nézve e következő alakot kapjuk:

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{B_{11}}{x-a_1} + \frac{B_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots$$
$$+ \frac{B_{21}}{x-a_2} + \frac{B_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{B_{m1}}{x-a_m} + \frac{B_{m2}}{(x-a_m)^2} + \dots,$$

hol

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad B_{\mu n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\mu} (z-a)^{n-1} \cdot f(z)\,dz.$$

Jelölvén az első sort $G(x)$-el, a többi m sor μ-edikét pedig $G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$-vel, látjuk, hogy egy egyértékű analytikus függvény, melynek véges számú singularitásai vannak, általános kifejezése csakugyan ez:

$$f(x) = G(x) + \sum_{\mu=1}^{m} G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right),$$

melyben $G(x)$ egy szabályos függvény alakjával bir, $G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)$ pedig $(x-a_\mu)$-nek negativ hatványai szerint haladó véges vagy végtelen sor a szerint, a mint az a_μ a függvény lényegtelen vagy lényeges singuláris pontja.

Ezen zárt s görbe belsejében előállíthatjuk az $f(x)$-et még egy szorzat alakjában is, a mi megint nem más, mint a függvény utolsó alakjának analytikai következménye.

Fölteszszük az $f(x)$-ről azt, hogy bizonyos zárt s görbe belsejében véges számú singuláris ponttal bír. Ilyen föltétel mellett pedig a $\frac{f'(x)}{f(x)}$-nek is hasonló módon véges számú singularitásai vannak, ha $f(x)$ még azon követelménynek is megfelel, hogy a zéróhelyeinek száma is véges legyen. Igy tehát a függvény logaritmikus deriváltjának singuláris pontjainak száma m, nem más mint a megadott függvény singularitásainak és zéróhelyeinek az összege. De, a mint tudjuk, ilyen mellékmeghatározások mellett a függvény előállítása ez:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \mathrm{G}(x) + \sum_{\mu=1}^{m} \mathrm{G}_\mu \left(\frac{1}{x-a_\mu}\right),$$

hol az a_μ között, természetesen, már az $f(x)$ zéróhelyei is vannak.

Ha az utolsó kifejezés jobb oldalán lévő egyes tagok analytikai kifejezését is kiirjuk, akkor még a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 (x-a) + \mathrm{A}_2 (x-a)^2 + \dots .$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \left[\frac{\mathrm{B}_{1\mu}}{x-a_\mu} + \frac{\mathrm{B}_{2\mu}}{(x-a_\mu)^2} + \dots\right].$$

Ha ezen egyenlet mind a két részén az integrálást véghez viszszük, azt kapjuk, hogy

$$l\, f(x) = \mathrm{C} + \mathrm{A}_0 (x-a) + \frac{\mathrm{A}_1}{2} (x-a)^2 + \dots .$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \left[\mathrm{B}_{1\mu}\, l\,(x-a_\mu) - \frac{\mathrm{B}_{2\mu}}{x-a_\mu} - \dots\right],$$

a mit igy is lehet irni:

$$l f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n (x-a)^n + \sum_{\mu=1}^{m} B_{1\mu}\, l\,(x-a_\mu) + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n},$$

miből, ha $B_{1\mu} = m_\mu$,

$$f(x) = e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A'_n (x-a)^n} \cdot e^{\sum\limits_{\mu=1}^{m} m_\mu\, l\,(x-a_\mu)}$$

$$\prod_{\mu=1}^{m} e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}}.$$

A jobb oldal első tényezője $(x-a)$-nak positiv hatványai szerint haladó sorba fejthető, másodika nem más mint $\prod\limits_{\mu=1}^{m} (x-a_\mu)^{m_\mu}$; a harmadik tényező pedig μ sort representál, melyek közül mindegyik $(x-a_\mu)$ negativ hatványai szerint halad.

E szerint

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (x-a)^n \cdot \prod_{\mu=1}^{m} (x-a_\mu)^{m_\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n},$$

vagy

$$f(x) = G'(x) \cdot \prod_{\mu=1}^{m} (x-a_\mu)^{m_\mu} G'_\mu \left(\frac{1}{x-a_\mu}\right),$$

melyben már a G'_μ-k között az $f(x)$ zéróhelyeit lehet törölni. Ugyanis az $f(x)$-ról föltételeztük, hogy véges számú zéróhelyekkel bir; ezek pedig még az eredetileg fölvett függvénynek lényegtelen singularitásai voltak. Ámde az

$f(x)$ kifejezéséhez rationális műveletek végzése által jutottunk; egy és ugyanazon a_i pont pedig egy függvénynek nem lehet mind zéróhelye, mind pedig lényegtelen singularitása; ezekből az következik, hogy a G'_i tagjainak száma véges és mindig kisebb m_i-nél vagy más szóval G'_μ-kben lehet az $f(x)$ zéróhelyeit törölni. Ezen műveleteket az $f(x)$ valamennyi zéróhelyeivel végezvén, utolsó kifejezése ez lesz:

$$f(x) = G(x) \,.\, \prod_{\mu=1}^{m} (x-a_\mu)^{m_\mu} \,.\, G'_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right),$$

melyben az a_μ-k között már az $f(x)$ zéróhelyei nem értendők. Ugyanott a $G(x)$ a-ra szabályos függvény alakjával bir és convergens, ha

$$\text{mod}\,(x-a) \angle \text{mod}\,(z-a);$$

a $G_\mu\left(\dfrac{1}{x-a_\mu}\right)$ pedig véges vagy végtelen convergens sort képvisel a szerint, a mint $x=a_\mu$ pont a függvény lényegtelen vagy lényeges singularitása; a sor convergentiájának föltétele pedig ez:

$$\text{mod}\,(z-a) \angle \text{mod}\,(x-a_\mu).$$

Ezen utolsó kifejezésünk, mely a II. alatt felhozott alakokkal megegyezik, csakugyan bizonyítja azon állításunkat, mely szerint minden függvény, mely az s görbe és a singuláris pontokat bezáró körök között analytikus, kifejezhető $(m+1)$ számú sorok szorzata gyanánt; ezen sorok egyike a változó positiv, a többi a változó negativ hatványai szerint halad.[1]

[1] A függvénynek ily előállítását Weierstrass: Zur Theorie etc. czímü értekezésében elemi módon hozta be, mely azonban nagyon hosszadalmas.

4. Mindezen okoskodások csak addig érvényesek, a míg a singuláris pontoknak száma véges; ha ez azonban végtelen nagy, úgy megtörténhetik az, hogy a II. alatti kifejezések már nem állanak — végtelen sok sornak összege, illetőleg szorzata nem lévén mindig convergens.

Erre nézve Mittag-Leffler[1] a függvényt oly alakban szerkesztette, melyben ez mindig véges és határozott értékű, akár milyen legyen is a singularitások száma és neme.

Megemlítjük azonban, hogy abban az esetben, a mikor a függvénynek végtelen sok csupán lényegtelen singularis pontja van, a függvény analytikai előállítását még „Weierstrass theorémájának“[2] tekintetbe vételével is adhatnók, ha csak visszaemlékezünk azon függvények reciprocitására, melyek ilyen összefüggésben vannak:

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Mi ezen speciális esettel nem foglalkozunk, mert azon disciplinákat is kellene tudni, melyeken Weierstrass theorémája alapszik, hanem a legáltalánosabbhoz fordulunk.

Fölteszszük ugyanis, hogy a függvény singuláris pontjainak sorozata $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, mely pontok a G_1, $G_2, \ldots, G_n, \ldots$ függvényeknek megfelelnek. Ezen G függvények általános alakja ez:

$$G_\mu(x) = G_\mu\left(\frac{1}{x - a_\mu}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n\mu}}{(x - a_\mu)^n}$$

Mittag-Leffler most azt állítja, hogy ilyen megálla-

[1] Mittag-Leffler: Comptes rendus. 1882. Sur la théorie etc.

[2] *Weierstrass*: Zur Theorie etc. Ezen tétel értelmében még oly függvényt is lehet szerkeszteni, melynél a „zéróhelyek sorozata“ (die Reihe der Null-Stellen) végtelen sok tagból áll.

podások mellett mindig úgy lehet szerkeszteni egy $P_\nu(x)$ algebraikus függvényt, melynek rendje n-el változik, hogy

$$(1)\ f(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[P_\nu(x) + G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)\right]$$

kifejezés convergens x-nek minden értékére nézve, mely az a_μ pontot bezáró c_μ körön kívül van.

Hogy ezt megmutassuk, fölteszszük, hogy az a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ pontok modulusai ezen két föltétnek alá vannak vetve:

1-ször. Legyen μ-nek és n-nek minden értékére

$$\operatorname{mod} a_\mu \leqq \operatorname{mod} a_{\mu+n},$$

azaz, a singuláris pontok sorában minden tag modulusa nagyobb vagy legfeljebb egyenlő az előtte álló tag modulusával.

2-szor. Ha a singuláris pontok sorozata végtelen sok tagból áll, úgy kell hogy

$$\lim_{\mu=\infty} \operatorname{mod} a_\mu = \infty$$

legyen.

Az előbbiekből ismeretes még az is, hogy a $G_\mu(x)$ az s és a c_μ kör által képezett körgyűrűben definiálva van. Irhatjuk tehát, hogy

$$G_\mu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G_\mu(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\mu} \frac{G_\mu(z)\,dz}{z-x}.$$

Mivel pedig kell, hogy a mi kifejezésünk a sík egész kiterjedésében álljon, azért s-nek sugarát végtelen nagynak is vehetjük föl. De ha a $z = \infty$, úgy még a $G_\mu(z) = o$, tehát kell, hogy

$$\lim_{z=\infty} \left[\frac{G_\mu(z)\,dz}{z-x} \right] = 0$$

legyen; ilyen meghatározás mellett a $G_\mu(x)$ kifejezése következővé válik:

$$(2) \quad G_\mu(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_\mu} \frac{G_\mu(z)\,dz}{z-x}.$$

Ha már most az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ pontok modulusai megfelelőleg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$; az x modulusának legnagyobb értéke ξ, és ha a c körök sugarai közül a legnagyobbikat ρ-val jelöljük, úgy az a-k első tulajdonságát tekintetbe véve, világos, hogy mindig lehet μ-nek egy l értékét találni, melytől kezdve $\alpha_\mu > \rho + \xi$, a mi annyit tesz, hogy x, mely a kezdőpont körül leirt ξ sugárral biró kör területének egyik pontja, mindig a c_μ körön kivűl van.

Az (1) alatti kifejezést most így is irhatjuk

$$(3)\ f(x) = \sum_{\mu=1}^{l-1} \left[P_\nu(x) + G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) \right] + \sum_{\mu=l}^{\infty} \left[P_\nu(x) + G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) \right].$$

A jobb oldal első része véges számú tagokból áll; azonkivül a G_μ függvény az $a_1, a_2, \ldots, a_l$ pontok környékében definiálva van egy convergens sor által, tehát az utolsó kifejezés első része is convergens. Igy állván a dolog, figyelmünk csak a második összeadási jel alatt álló kifejezésre irányul, ez által pedig, a mint látni fogjuk, még a $P_\nu(x)$-nek jelentősége is ki fog derűlni.

E végre visszamegyünk a $G_\mu(x)$-nek alakjára, (2)-re, melyet most így irunk:

$$G_\mu(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\mu} G_\mu(z)\,dz\left[\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\ldots + \frac{x^{\nu-1}}{z^\nu}+\frac{x^\nu}{z^\nu(z-x)}\right],$$

vagy ha ketté szakítjuk,

$$G_\mu(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\mu} G_\mu(z)\,dz\left[\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\ldots+\frac{x^{\nu-1}}{z^\nu}\right] - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\mu}\frac{x^\nu G_\mu(z)\,dz}{z^\nu(z-x)};$$

ezen kifejezésben előforduló ν számot majd úgy n-nek függvényében határozunk meg, hogy a $G_\mu(x)$ függvény egyenletesen convergens legyen és ha még az első integrálnak értékét P_ν -vel, a másodikét $-R_\mu$ -vel, akkor még

$$G_\mu(x) + P_\nu(x) = R_\mu$$

Legyen már most a c_μ körön M_μ a G_μ modulusának legnagyobb értéke; világos még, hogy ugyanazon körre nézve mod $z \overline{\gtrless} \alpha_\mu - \rho$; ilyen megállapodás után pedig irhatjuk, hogy

$$\text{mod}\, R_\mu \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{c_\mu}\frac{M_\mu\,\xi^\nu\,ds}{(\alpha_\mu-\rho)^\nu(\alpha_\mu-\rho-\xi)} \leqq \frac{M_\mu\,\rho\,\xi^\nu}{(\alpha_\mu-\rho)^\nu(\alpha_\mu-\rho-\xi)}.$$

Ha most egy oly λ_μ állandót hozunk be, mely az

$$M_\mu \rho = (\alpha_\mu - \rho)^{\lambda_\mu}$$

föltétegyenlet által van meghatározva, akkor a fentebbi kifejezést még így is irhatjuk:

$$\operatorname{mod} R_\mu \leqq \frac{\xi^\nu}{(\alpha_\mu - \rho)^{\nu - \lambda_\mu}(\alpha_\mu - \rho - \xi)},$$

ebből pedig

$$\sum_{\mu=l}^{\infty} \operatorname{mod} R_\mu \leqq \sum_{\mu=l}^{\infty} \frac{\xi^\nu}{(\alpha_\mu - \rho)^{\nu - \lambda_\mu}(\alpha_\mu - \rho - \xi)}.$$

Itt most két esetet különböztethetünk meg a λ_μ értékére vonatkozólag. Ha ez negativ vagy zérus, úgy világos, hogy az utolsó kifejezés jobb része akkor zérus, ha $\nu = \mu$; ellenben, ha λ_μ positiv szám, akkor a $\nu = \mu + 2\lambda_\mu$ helyettesítés kielégíti a sor convergentiájának föltételét.

Igy tehát ν-nek alkalmas megválasztása után csakugyan minden μ-re nézve

$$\sum_{\mu=l}^{\infty} \left[G_\mu(x) + P_\nu(x) \right] = \sum_{\mu=l}^{\infty} R_\mu$$

kifejezés egy egyenletesen convergens sort képvisel. De ezen sor convergentiája maga után vonja a (3) és így az (1) alatti kifejezés convergentiáját is; látjuk tehát, hogy csakugyan mindig lehet találni egy oly $P_\nu(x)$ függvényt, mely az (1)-nek convergentiáját, úgyszólván, helyreigazítja.

Ha még az (1) hez egy tetszésszerinti $G(x)$ függvényt hozzáveszünk, a melynek sem lényegtelen, sem lényeges singuláris pontja nincs, akkor a függvény legáltalánosabb alakja ez:

$$f(x) = \mathrm{G}(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\mathrm{P}_{\nu}(x) + \mathrm{G}_{\mu}\left(\frac{1}{x-a_{\mu}}\right)\right],$$

mely egyszersmind Mittag-Leffler tételének analytikai kifejezése. A G_{μ} itt is, mint azelőtt, a singuláris pontnak jellemző függvénye.

Az $f(x)$ ezen kifejezését összehasonlítva a III. alattiak elsejével, látjuk, hogy a kettő tökéletesen egymással egyenlő, s így még csak azon kérdésünk nincs eldöntve, hogy lehet-e egy oly függvényt is szorzat alakjában előállítani, melynek végtelen sok singularitása van? Látni fogjuk, hogy ez is lehetséges. A gondolatmenet veleje itt is azon igazságon alapszik, hogy egy logaritmikus deriváltnak integrálmaradéka véges positiv vagy negativ egész szám (zérust beleértve).

Fölveszünk ugyanis egy függvényt, mely az egész sikban analytikus, kivéve az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ pontokat, ezen függvény deriváltja hasonló módon olyan lévén, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ singularitásai összeesnek az $f(x)$ zéróhelyeivel és singuláris pontjaival.

Irhatjuk tehát, hogy

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \mathrm{G}(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\mathrm{P}_{\nu}(x) + \mathrm{G}_{\mu}\left(\frac{1}{x-a_{\mu}}\right)\right],$$

hol az a-k közül $f(x)$-nek zéróhelyei is vannak; ha még a $\mathrm{G}(x)$ és $\mathrm{G}_{\mu}\left(\frac{1}{x-a_{\mu}}\right)$-nek analytikai kifejezését kiirjuk, lesz

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1(x-a) + \mathrm{A}_2(x-a)^2 + \ldots$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\mathrm{P}_{\nu}(x) + \frac{\mathrm{B}_{1\mu}}{x-a} + \ldots\right].$$

Mivel pedig ezen kifejezés jobb részén lévő sorok az egész sík kiterjedésében convergensek, tehát egyenletesen convergens hatványsorok, úgy a tagonkénti integrálás meg lévén engedve, áll

$$l\,f(x) = C + A_0\,(x-a) + \frac{A_1}{2}\,(x-a)^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[p_\nu\,(x) + B_{1\mu}\,l(x-a_\mu) - \frac{B_{2\mu}}{x-a_\mu} - \ldots\right],$$

mely kifejezésben $p_\nu\,(x)$ hasonlóképen mint a $P_\nu\,(x)$ integrandusa ν-nek s ezzel μ-nek a függvénye is; de a $B_{1\mu}$ együttható értéke egyenlő egy m_μ positiv vagy negativ számmal, irhatjuk tehát, hogy

$$l\,f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n\,(x-a)^\mu + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[p_\nu\,(x) + m_\mu\,l\,(x-a_\mu)\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}\right],$$

a miből azután

$$f(x) = e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A'_n\,(x-a)^n}\,.\,e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\left[p_\nu\,(x) + m_\mu\,l\,(x-a_\mu) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}\right]}.$$

Azonban a második tényező kitevőjében előforduló $p_\nu\,(x)$ függvényre az összegezési jel csak bizonyos előleges megállapodás után vonatkozhatik — meglehet, hogy ezen függvények közül egynéhánya elenyészik, — azért a $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} p_\nu\,(x)$-et mint kitevőt alapjával együtt irhatjuk csakis az utolsó kifejezés kellő átalakítása után. Az $f\,(x)$ jobb oldalán előforduló többi exponentiális függvényeket még így is irhatjuk:

$$e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A'_n (x-a)^n} = G(x),$$

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[m_\mu l(x-a_\mu) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{B'_{n\mu}}{(x-a_\mu)^n}\right]} = \prod_{\mu=1}^{\infty} (x-a_\mu)^{m_n}.$$

$$G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right);$$

ezeket $f(x)$ kifejezésébe helyettesítve, azt kapjuk, hogy $f(x)$ általános kifejezése még ez is:

$$(1)\quad f(x) = G(x) . \prod_{\mu=1}^{\infty} (x-a_\mu)^{m_\mu} G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right) . e^{p_\nu(x)}.$$

Látjuk tehát, hogy ha egy függvény végtelen sok singularis ponttal bír, úgy az egy végtelen sok szorzóból álló szorzat alakjában irható; ezen szorzók mindegyikét tekinthetni a singularis pontok nemét jellemző függvényének.

Ezen kifejezésben az $f(x)$ zéróhelyei az a_μ-k közűl már ki vannak küszöbölve, — azon eljárással élve, a melyet egy véges számú singuláris ponttal bíró függvény szorzat-alakjában való előállításánál használtunk.

Végül még fölemlítjük, hogy az a-k modulusaira és a $p_\nu(x)$ függvény természetére vonatkozó föltevések itt is fennállanak, mivel ezen tétel kiindulási pontja épen a Mittag-Leffler tétele.

Ha még azt mondjuk, hogy az $f(x)$-nek (1) alatti előállítása tökéletesen megegyezik a III. alatt bemutatott alakok utolsójával, úgy egyszersmind feladatunkat tökéletesen bevégzettnek tekinthetjük.