Sarrus-ovo pravilo u teoriji prostornih determinanata.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 11. siečnja 1902.

NAPISAO DR. BOGDAN GAVRILOVIĆ.

Neka je sa a_{ijk} obilježen u nekoj prostornoj determinanti elemenat i-te horizontalne ravni, j-te vertikalne ravni prvoga razreda i k-te vertikalne ravni drugoga razreda. Tada će u matrici prostorne determinante trećega reda imati 27 elemenata i oni će u njoj biti ovako raspoređeni:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & a_{111} & & & a_{112} & & & a_{113} \\
 & a_{121} & & & a_{122} & & & a_{123} & \\
a_{131} & & & a_{132} & & & a_{133} & & \\
 & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\cdots & & & \cdots & & & \cdots & & \\
 & & a_{311} & & & a_{312} & & & a_{313} \\
 & a_{321} & & & a_{322} & & & a_{323} & \\
a_{331} & & & a_{332} & & & a_{333}. & &
\end{array}
$$

Tu determinantu ću simbolički bilježiti sa

$$|111,\ 333|.$$

Zna se, da su matricom te determinante u opće određene tri različite determinante. Između tih determinanata zvaću, prema uobičajenoj razredbi, prvom determinantom onu, koja odgovara raznim permutacijama drugih i trećih kazaljaka, i tu ću determinantu bilježiti sa Δ_1; tako zvanu drugu determinantu, t. j. onu, koja postaje razmještanjem trećih i prvih kazaljaka, bilježiću sa Δ_2; na posljetku bilježiću treću determinantu sa Δ_3 i nju bismo dobili razmjenjivanjem prvih i drugih kazaljaka.

Kako u izrazu, što predstavlja prostornu determinantu n-toga stepena, ima svega $(n!)^2$ članova, to će u razvijenom obliku determinante $|111, 333|$ biti svega 36 članova. Ja ću pokazati, kako se na vrlo prost, mehanički način određuju s jedne strane sami ti članovi, a s druge strane i znaci, koje oni imaju u pomenutom izrazu determinante $|111, 333|$ i zvaću pravilo, po kome se na taj način razvijaju prostorne determinante trećega reda, Sarrus-ovim pravilom.

Uočimo toga radi najprije prvu determinantu $\Delta_1 = |111, 333|$. Ta determinanta može se izraziti ovim zbirom običnih determinanata:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 = & \begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{212} & a_{222} & a_{232} \\ a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{312} & a_{322} & a_{332} \end{vmatrix} \\
& - \begin{vmatrix} a_{112} & a_{122} & a_{132} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{112} & a_{122} & a_{132} \\ a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{vmatrix} \\
& + \begin{vmatrix} a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{312} & a_{322} & a_{332} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{212} & a_{222} & a_{232} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Prema tome je

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 = & \; a_{111}\, a_{222}\, a_{333} - a_{111}\, a_{223}\, a_{332} - a_{112}\, a_{221}\, a_{333} \\
& - a_{111}\, a_{232}\, a_{323} + a_{111}\, a_{233}\, a_{322} + a_{112}\, a_{231}\, a_{323} \\
& - a_{121}\, a_{212}\, a_{333} + a_{121}\, a_{213}\, a_{332} + a_{122}\, a_{211}\, a_{333} \\
& + a_{121}\, a_{232}\, a_{313} - a_{121}\, a_{233}\, a_{312} - a_{122}\, a_{231}\, a_{313} \\
& + a_{131}\, a_{212}\, a_{323} - a_{131}\, a_{213}\, a_{322} - a_{132}\, a_{211}\, a_{323} \\
& - a_{131}\, a_{222}\, a_{313} + a_{131}\, a_{223}\, a_{312} + a_{132}\, a_{221}\, a_{313} \\[1ex]
& + a_{112}\, a_{223}\, a_{331} + a_{113}\, a_{221}\, a_{332} - a_{113}\, a_{222}\, a_{331} \\
& - a_{112}\, a_{233}\, a_{321} - a_{113}\, a_{231}\, a_{322} + a_{113}\, a_{232}\, a_{321} \\
& - a_{122}\, a_{213}\, a_{331} - a_{123}\, a_{211}\, a_{332} + a_{123}\, a_{212}\, a_{331} \\
& + a_{122}\, a_{233}\, a_{311} + a_{123}\, a_{231}\, a_{312} - a_{123}\, a_{232}\, a_{311} \\
& + a_{132}\, a_{213}\, a_{321} + a_{133}\, a_{211}\, a_{322} - a_{133}\, a_{212}\, a_{321} \\
& - a_{132}\, a_{223}\, a_{311} - a_{133}\, a_{221}\, a_{312} + a_{133}\, a_{222}\, a_{311}.
\end{aligned}
$$

Dopišimo sad uz matricu determinante Δ_1 desno prvu, pa odmah do nje i drugu (ili lijevo treću, pa odmah do nje i drugu) vertikalnu ravan drugoga razreda. Tada će se matrica date determinante u jednom pravcu proširiti. Više te tako proširene matrice dometnućemo dalje njezinu treću, pa odmah više nje i njezinu drugu (ili niže proširene matrice njezinu prvu, pa odmah niže nje i njezinu drugu) vertikalnu ravan prvoga razreda. Tada će se očevidno pomenuta proširena matrica također proširiti u jednom pravcu, t. j. prvobitna matrica biće tada proširena u dva pravca. Takvih u dva pravca proširenih matrica biće svega četiri. U jednoj između te četiri matrice biće, na primjer, elementi u prvoj horizontalnoj ravni ovako raspoređeni:

$$\begin{matrix} a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{121} & a_{122} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{131} & a_{132} \\ a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{121} & a_{122} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{131} & a_{132}, \end{matrix}$$

a u prvoj vertikalnoj ravni prvoga razreda ići će elementi u toj matrici ovim redom:

$$\begin{matrix} a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{121} & a_{122} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & a_{221} & a_{222} \\ a_{321} & a_{322} & a_{323} & a_{321} & a_{322}. \end{matrix}$$

Zatim ćemo u toj u dva pravca proširenoj matrici povući sve moguće dijagonale uporedo sa dijagonalama prvobitne matrice i to tako, da na tim dijagonalama bude po tri elementa date determinante. Svega će tih dijagonala biti 36: glavna dijagonala prvobitne matrice i uporedo s njom još osam drugih dijagonala i osim ovih ostale tri dijagonale date determinante i uporedo sa svakom od njih još po osam drugih dijagonala. Proizvodi elemenata, što leže na tim dijagonalama, biće već članovi determinante Δ_1.

Da bismo odredili znake, koje ti proizvodi imaju u izrazu, što predstavlja determinantu Δ_1, podijelićemo pomenute dijagonale proširene matrice u dvije vrste: u vrstu glavnih i vrstu sporednih dijagonala. Načelo, po kome će se u te dvije vrste razređivati dijagonale proširene matrice, utvrdiću ovako.

Uočiću prvu horizontalnu ravan prvobitne determinante. Pošto će sad četiri dijagonale to determinante prelaziti preko elemenata a_{111}, a_{113}, a_{131} i a_{133}, to ću te elemente zvati dijagonalnim elementima prve horizontalne ravni i pomenuću to, da su u posljednja tri elementa samo po dvije kazaljke međusobno jednake: ili prve dvije, ili prva i treća, ili posljednje dvije.

Kako se međutim članovi determinante $\Delta_1 = |111, 333|$ dobivaju, kad se u osnovnom članu $a_{111}\, a_{222}\, a_{333}$ te determinante na sve moguće načine razmjeste druge i treće kazaljke, i kako su s druge strane među dijagonalnim elementima druga i treća kazaljka jednake samo u elemenata a_{111} i a_{133}, to ću između pomenutih 36 dijagonala proširene matrice zvati glavnim dijagonalama te matrice 1-vo, glavnu dijagonalu prvobitne matrice i osam onih dijagonala, koje u proširenoj matrici s njom uporedo idu, i 2-go, onu dijagonalu prvobitne determinante, što prelazi preko dijagonalnog elementa a_{133}, i osim toga svih ostalih osam dijagonala, koje s njom uporedo idu. Ostale dijagonale proširene matrice, a biće ih svega još 16, zvaću sporednim dijagonalama proširene matrice determinante Δ_1. Proizvodi elemenata glavnih dijagonala proširene matrice imaće u determinanti pozitivan znak, a proizvodi elemenata sporednih dijagonala negativan znak.

Prijeđimo sad na determinantu Δ_2. Ta determinanta dobiva se, kao što pomenusmo, kad se u glavnom članu $a_{111}\, a_{222}\, a_{333}$ rasporede na sve moguće načine prve i treće kazaljke. Malo čas smo, tražeći članove determinante Δ_1, u pomenutom glavnom članu razmjenjivali na sve moguće načine druge i treće kazaljke i tada smo širili prvobitnu matricu samo pravcem vertikalnih ravni, t. j. samo u pravcu onih ravni, koje su u matrici determinante Δ_1 bile označene bilo drugom, bilo trećom kazaljkom. Pošto se sada u glavnom članu date determinate razmještaju na sve moguće načine samo prve i treće kazaljke, to ćemo u ovaj mah i determinantu Δ_2 širiti samo u pravcu onih ravni, koje su u matrici determinante Δ_2 baš tim dvjema kazaljkama i označene; dopisaćemo dakle desno uz matricu prvobitne determinante najprije prvu, pa odmah do nje i drugu (ili lijevo najprije treću, pa odmah do nje i drugu) vertikalnu ravan drugoga razreda i dometnućemo osim toga ispod te nove proširene matrice najprije njezinu prvu, pa odmah ispod nje i njezinu drugu (ili na novu matricu najprije njezinu treću, pa odmah više nje i njezinu drugu) horizontalnu ravan. Svega ćemo dakle opet na četiri načina u dva pravca širiti matricu prvobitne determinante, a u jednoj od te četiri matrice biće, na primjer, elementi u prvoj horizontalnoj ravni ovako raspoređeni:

$$\begin{array}{ccccc} a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{121} & a_{122} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{131} & a_{132}, \end{array}$$

a elementi u prvoj vertikalnoj ravni prvoga razreda ovako:

$$\begin{array}{ccccc} a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{111} & a_{112} \\ a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{211} & a_{212} \\ a_{311} & a_{312} & a_{313} & a_{311} & a_{312} \\ a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{111} & a_{112} \\ a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{211} & a_{212}. \end{array}$$

Povucimo sad opet u toj proširenoj matrici sve moguće dijagonale uporedo sa dijagonalama date prvobitne determinante i to tako, da na tim dijagonalama bude po tri elementa te determinante. Proizvodi elemenata tih dijagonala biće već članovi determinante Δ_2. Pošto se sad u glavnom članu razmještaju na sve moguće načine prve i treće kazaljke i pošto su među dijagonalnim elementima prva i treća kazaljka jednake samo u elemenata a_{111} i a_{131}, to ću glavnim dijagonalama proširene matrice determinante $\Delta_2 = |111, 333|$ zvati 1-vo, glavnu dijagonalu prvobitne determinante i osam onih dijagonala proširene matrice, koje s njom uporedo idu, i 2-go, dijagonalu, koja u prvobitnoj matrici prelazi preko dijagonalnog elementa a_{131} i osim nje još i svih ostalih osam uporednih dijagonala proširene matrice. Ostale dijagonale proširene matrice bile bi sporedne. Pozitivan znak imaće sad u izrazu, što predstavlja determinantu Δ_2, proizvodi elemenata glavnih, a negativan proizvodi elemenata sporednih dijagonala.

Ostaje nam još da pokažemo, kako se na pomenuti mehanički način razvija i determinanta Δ_3. Članovi te determinante dobivaju se, kad se u glavnom članu njezinom razmjeste na sve moguće načine prve i druge kazaljke. Stoga ćemo u ovaj mah širiti matricu prvobitne determinante samo u pravcu onih ravni, koje su tim kazaljkama i obilježene, t. j. širićemo matricu u pravcu horizontalnih ravni i u pravcu vertikalnih ravni prvoga razreda. Prema tome ćemo dometnuti ispod matrice prvobitne determinante najprije prvu, pa odmah ispod nje i drugu (ili na matricu najprije treću, pa odmah na nju i drugu) horizontalnu ravan i dopisaćemo zatim iza te u jednom pravcu proširene prostorne matrice uz njezinu vertikalnu ravan prvoga razreda najprije i njezinu treću, pa odmah iza ove i njezinu drugu (ili ispred te matrice neposredno uz treću vertikalnu ravan prvoga razreda najprije njezinu prvu, pa ispred ove i njezinu drugu) vertikalnu ravan prvoga razreda. I u ovom slučaju širićemo dakle u dva pravca na četiri različita načina matricu prvobitne determinante. U jednoj od tih matrica biće, na primjer, elementi u prvoj horizontalnoj ravni ovako raspoređeni:

$$\begin{array}{ccc} a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} \\ a_{111} & a_{112} & a_{113} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133}, \end{array}$$

a u prvoj vertikalnoj ravni prvoga razreda ovako:

$$\begin{array}{ccc} a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} \\ a_{321} & a_{322} & a_{323} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223}. \end{array}$$

Opet ćemo sad u jednoj od tih u dva pravca proširenih prostornih determinanata povući sve moguće dijagonale uporedo sa dijagonalama prvobitne matrice i to tako, da na tim dijagonalama bude po tri elementa date determinante. P r o i z v o d i e l e m e n a t a t i h d i j a g o n a l a b i ć e č l a n o v i d e t e r m i n a n t e Δ_3. Pitanje je samo još, s kakvim se znacima javljaju ti članovi u izrazu, što predstavlja determinantu Δ_3? Da bismo na to pitanje odgovorili, podijelićemo opet pomenute dijagonale proširene matrice u glavne i sporedne, a po već utvrđenom načelu. Kako se u ovaj mah u glavnom članu determinante razmještaju na sve moguće načine prve dvije kazaljke i kako su te dvije kazaljke među dijagonalnim elementima jednake samo u elemenata a_{111} i a_{113}, to ću glavnim dijagonalama proširene matrice determinante $\Delta_3 = /111, 333/$ zvati

1-vo, glavnu dijagonalu prvobitne determinante i osam onih dijagonala, koje u proširenoj matrici s njom uporedo idu, i 2-go, dijagonalu, koja u prvobitnoj matrici prelazi preko elementa a_{113} i osam ostalih dijagonala, koje s tom dijagonalom uporedo idu. Sve ostale dijagonale proširene matrice, a biće ih svega još 16, zvaću sporednim dijagonalama. S pozitivnim znakom javljaće se sad u razvijenom obliku determinante Δ_3 proizvodi elemenata glavnih, a s negativnim proizvodi elemenata sporednih dijagonala.

Da bismo mogli općim jednim pravilom obuhvatiti način, na koji se ma koja između pomenutih determinanata trećega stepena razvija, pomenućemo ovo:

1-vo. Kad se matrica širi u pravcu pojedinih ravni, onda se kazaljke, kojima su te ravni obilježene, ciklički mijenjaju, što će reći, da se i same ravni ciklički mijenjaju.

2-go. Te ravni, koje se pri širenju matricâ ciklički mijenjaju, obilježene su svakad onim dvjema kazaljkama (drugom i trećom, ili trećom i prvom, ili najzad prvom i drugom), koje se u svakom pojedinom slučaju na sve moguće načine razmještaju.

Dobili smo dakle ovo *Sarrus-ovo pravilo:* Kad se hoće, da se razvije jedna od prostornih determinanata trećega stepena, onda treba matricu te determinante širiti u dva pravca i to tako, da ravni, koje se pri tome ciklički mijenjaju, budu obilježene onim dvjema kazaljkama, koje se u svakom pojedinom slučaju na sve moguće načine razmještaju. U tim proširenim matricama treba povući uporedo sa svima dijagonalama prvobitne determinante sve moguće dijagonale tako, da na tim dijagonalama bude po tri elementa date determinante. Proizvodi elemenata glavnih dijagonala proširene matrice biće pozitivni, a proizvodi elemenata sporednih dijagonala biće negativni članovi te determinante.