O vrijednostima nekih određenih integrala.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 11. siečnja 1902.

NAPISAO DR. BOGDAN GAVRILOVIĆ.

Uočimo u ravni površinu S, ograničenu prostom konturom c, i pretpostavimo, da u toj površini leži tačka a. Ako je sad u oblasti tačke a neka funkcija $\varphi(z)$ holomorfna, onda ćemo tu funkciju moći oko tačke a razviti u red po Taylor-ovu obrascu. Biće dakle

$$\varphi(z) = A_0 + A_1 (z - a) + A_2 (z - a)^2 + \ldots\ldots \tag{1}$$

S druge strane opet, ako se pretpostavi, da je u pomenutoj površini tačka a drugoj nekoj funkciji $\psi(z)$ jedini singularitet (pol ili esencijalna tačka), onda će po Laurent-ovoj teoremi biti

$$\psi(z) = Q_1 (z - a) + Q_2 \left(\frac{1}{z - a}\right),$$

i u tom izrazu su sa Q_1 i Q_2 u opće označena dva ovakva reda:

$$Q_1 (z - a) = a_0 + a_1 (z - a) + a_2 (z - a)^2 + \ldots\ldots,$$

$$Q_2\left(\frac{1}{z - a}\right) = \frac{b_1}{z - a} + \frac{b_2}{(z - a)^2} + \frac{b_3}{(z - a)^3} + \ldots\ldots \tag{2}$$

U tom slučaju biće, kao što sam pređe[1] dokazao,

$$I = \int_c \varphi(z)\, \psi(z)\, dz = 2\pi i \,\Sigma A_{i-1}\, b_i. \tag{3}$$

Po tome obrascu vidi se, da vrijednost integrala I zavisi samo od koeficijenata reda (1) i od koeficijenata reda (2), dok

[1] V. moju raspravu, štampanu u 139. knjizi Rada pod natpisom: O ostacima jednogranih funkcija.

funkcija $Q_1(z-a)$, koja je očevidno jedan elemenat funkcije $\psi(z)$, nikako ne utječe na vrijednost integrala I; tu vrijednost određuju dakle posredno samo funkcija $\varphi(z)$ i karakteristična funkcija funkcije $\psi(z)$. Kad bismo prema tome uz funkciju $\psi(z)$ uzeli još neku drugu funkciju $\chi(z)$, koja bi se oko tačke a po Laurent-ovu obrascu mogla razviti u ovakav red:

$$\chi(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \frac{b_3}{(z-a)^3} + \ldots\ldots,$$

onda će očevidno biti

$$\int_c \varphi(z)\psi(z)\,dz = \int_c \varphi(z)\chi(z)\,dz.$$

Obratno, ako je funkcija $\varphi(z)$ u površini ograničenoj konturom c holomorfna, i ako je osim toga

$$\int_c \varphi(z)\psi(z)\,dz = \int_c \varphi(z)\chi(z)\,dz,$$

onda razlika funkcijâ $\psi(z)$ i $\chi(z)$ može u toj oblasti biti holomorfna funkcija, ma tačka a bila i esencijalan singularitet funkcijâ $\psi(z)$ i $\chi(z)$.

Pretpostavimo sad, da je tačka a esencijalna tačka i funkciji $\varphi(z)$ i funkciji $\psi(z)$. Tada ćemo i funkciju $\varphi(z)$ moći u okolini tačke a razviti u red po Laurent-ovu obrascu tako, da će biti

$$\varphi(z) = P_1(z-a) + P_2\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

U tome izrazu su analitički ekvivalenti funkcijâ P_1 i P_2 ova dva reda:

$$P_1(z-a) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots\ldots$$

i

$$P_2\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \frac{B_3}{(z-a)^3} + \ldots\ldots$$

Pita se, kako ćemo u ovom najopćijem slučaju naći vrijednost integrala

$$I = \int_c \varphi(z)\,\psi(z)\,dz.$$

Prvi i neposredni put bio bi ovo. Trebalo bi funkciju $\varphi(z)\,\psi(z)$ razviti u red oko tačke a po Laurent-ovu obrascu. Ako bi sad u redu, koji se bude dobio, ostatak funkcije $\varphi(z)\,\psi(z)$ bio broj R, onda će biti

$$\int_c \varphi(z)\,\psi(z)\,dz = 2\pi i\,R,$$

i tim bi naše pitanje bilo riješeno.

Često je međutim teško razviti funkciju $\varphi(z)\,\psi(z)$ u red po Laurent-ovu obrascu, a biva pri tome, da su redovi, što predstavljaju funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$, ili poznati, ili da se lako nalaze. U tom slučaju treba vrijednost integrala I ovako određivati.

Proizvod funkcija $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ biće u ovaj mah ovo:

$$P_1\,Q_1 + (P_1\,Q_2 + P_2\,Q_1) + P_2\,Q_2.$$

Stoga je

$$\int_c \varphi(z)\,\psi(z)\,dz = \int_c P_1\,Q_1\,dz + \int_c (P_1\,Q_2 + P_2\,Q_1)\,dz + \int_c P_2 Q_2 dz. \quad (4)$$

Prvi između posljednja tri integrala je očevidno $= o$, pošto je funkcija $P_1\,Q_1$ u oblasti tačke a holomorfna.

Isto će tako biti i

$$\int_c P_2\,Q_2\,dz = o$$

stoga, što u proizvodu redova P_2 i Q_2 nema ni jednoga člana, u kome bi se javljao prvi stepen količnika $\frac{1}{z-a}$[1].

Ostaje dakle između pomenuta tri integrala na desnoj strani ekvacije (4) samo još onaj integral u sredini, a taj se može izraziti zbirom dva integrala tako, da je

---

[1] *Picard.* Cours d' Analyse, II. p. 118.

$$\int\limits_c \varphi(z)\,\psi(z)\,dz = \int\limits_c P_1\,Q_2\,dz + \int\limits_c P_2\,Q_1\,dz. \tag{5}$$

No kako su funkcije P_1 i P_2 holomorfne u okolini tačke a, i kako je s druge strane funkcijama Q_2 i Q_1 ta tačka esencijalan singularitet, to ćemo vrijednosti posljednja dva integrala moći odrediti po obrascu (3). Prema tome bi integracija diferencijalne funkcije $\varphi(z)\,\psi(z)\,dz$ u ovaj mah duž zatvorene proste konture bila u neku ruku djelimična.

Dakle, ako je u nekoj oblasti, ograničenoj prostom konturom c, tačka a esencijalan i pri tome jedini singularitet funkcija $\varphi(z)$ i $\psi(z)$, i ako se u oblasti te tačke a funkcija $\varphi(z)$ može razviti u ovaj red:

$$\varphi(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \ldots,$$

a funkcija $\psi(z)$ u ovaj red:

$$\psi(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \ldots,$$

onda se integral diferencijalne funkcije $\varphi(z)\,\psi(z)\,dz$ duž zatvorene proste konture c dobiva djelimičnom integracijom, a vrijednost njegova je ovo:

$$\int\limits_c \varphi(z)\,\psi(z)\,dz = 2\pi i\,\Sigma\,(A_{i-1}\,b_i + a_{i-1}\,B_i). \tag{6}$$

Uzmimo sad, da u redu, što predstavlja funkciju $\varphi(z)$, nema holomorfnog dijela $P_1(z-a)$. Tada će biti

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = o,$$

t. j. biće

$$\int\limits_c \varphi(z)\,\psi(z)\,dz = 2\pi i\,\Sigma\,a_{i-1}\,B_i.$$

To znači, da integral I ne će u ovom slučaju zavisiti od koeficijenata reda (2), i ako je karakteristična funkcija $Q_2\left(\frac{1}{z-a}\right)$ analitički elemenat funkcije $\psi(z)$. Ako dakle uz funkciju $\psi(z)$ uzmemo drugu neku funkciju $\chi(z)$, koja bi se oko tačke a mogla po Laurent-ovu obrascu razviti u ovakav red:

$$\chi(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \ldots,$$

onda će nam jasno biti, da će i u ovaj mah morati biti

$$\int_c \varphi(z)\psi(z)\,dz = \int_c \varphi(z)\chi(z)\,dz.$$

Obratno, ako funkcija $\varphi(z)$ u površini ograničenoj konturom c nema holomorfnog dijela, i ako je osim toga

$$\int_c \varphi(z)\psi(z)\,dz = \int_c \varphi(z)\chi(z)\,dz,$$

onda će razlika funkcijâ $\psi(z)$ i $\chi(z)$ u opće biti neka funkcija, koja u toj površini nema holomorfnog dijela.

Kad je

$$\varphi(z) = \psi(z) = \omega,$$

onda je prema obrascu (6)

$$\int_c \omega^2\,dz = 4\pi i\,\Sigma A_{i-1}B_i,$$

a po tome se vidi ovo: Kad je u površini, ograničenoj prostom konturom c, tačka a esencijalan i pri tome jedini singularitet funkcijâ $u = \varphi(z)$ i $v = \psi(z)$, onda je

$$\int_c (u+v)^2\,dz = 4\pi i\,\Sigma\left(A_{i-1} + a_{i-1}\right)\left(B_i + b_i\right).$$

Uzmimo sad ponovo, da je

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = 0.$$

Tada u redu, što u oblasti esencijalne tačke a predstavlja funkciju $\omega = \varphi(z)$, ne će biti holomorfnog dijela, i u tom slučaju biće

$$\int_c \omega^2 \, dz = o.$$

To se u ostalom vidi neposredno i po tome, što u onom slučaju u redu, što predstavlja funkciju ω^2, ne će biti člana, u kome bi se javljao prvi stepen količnika $\dfrac{1}{z-a}$.

Najzad pomenućemo još i ovo. Kad bi funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ u oblasti ograničenoj konturom c imale više singularnih tačaka, onda bismo, tražeći vrijednost našem integralu, prethodno morali izračunati ostatke, koji proizvodu tih funkcija odgovaraju u svima pojedinim singularnim tačkama, i tada bi nam prema jednoj poznatoj Cauchy-jevoj teoremi zbir tih ostataka, pomnožen sa $2\pi i$, predstavljao vrijednost integrala tako, da će u tom slučaju biti

$$\int_c \varphi(z)\, \psi(z)\, dz = 2\pi i \, \Sigma \, \Sigma \left(A_{i-1} b_i + a_{i-1} B_i \right).$$