ПРОБЛЕМ ПРОСТОРА, ХИПЕР-ПРОСТОРА И КОНТИНУУМА.

ПРИСТУПНА АКАДЕМСКА БЕСЕДА БОГДАНА ГАВРИЛОВИЋА ОДРЖАНА 22. ФЕБРУАРА (7. МАРТА) 1926.

Господо Академици,

Кад сам се био одлучивао, да у Академији на данашњи свечаник и њезин и мој, изнесем свој поглед о простору, хипер-простору и континууму, ја нисам ни у једном тренутку био губио из вида то, да би се математичар ушавши у »мраморну палату« филозофије могао наћи у врло критичној ситуацији и на врло опасном путу. Али, иако знам да проблем простора, хипер-простора и континуума par excellence пада у област филозофије, ипак зато могу и смем тврдити, да се о простору, хипер-простору и континууму — о тим фундаменталним појмовима филозофије — може говорити и са гледишта математике.

Ти се појмови јављају на име у самим основама разних геометрија и хипер-геометрија; за неке од њих су везани ови проблеми: проблем кретања; проблем математичког континуума; проблем континуитета функција и т. д. А кад се то има у виду, онда је јасно да простор, хипер-простор и континуум као појмови улазе у један део целокупног математичког система и да се о њима не само може, већ некад чак и мора говорити баш и са гледишта саме математике.

Често би се рекло, да се математика и филозофија попреко гледе. То је донекле и тачно, али је то тачно само онда, кад се оне не разумеју. Мислим да не ћу погрешити, кад будем своје мишљење о томе овако формулирао: потребна је математичару филозофија и није истина да је поглед »primum vivere, deinde philosophari« тачан. Али је исто тако и филозофу потребна математика. Онима првима — математичарима — рекао бих, да математици није ништа сметало, што се до појма о инкомензурабилности количина — до тог фундаменталног појма математике, који је тек ту скоро решен — дошло у филозофској школи Питагориној[1]. Али бих исто тако и филозофе могао запитати, какве је штете имала филозофија од тога, што је Вајерштрас[2], математичар, критички објаснио диференциални количник и што је тим својим објашњењем учинио, да се тек током последњих педесетак година поставе праве основе за филозофију Лајбницова Калкулуса[3].

Без тог узајамног наслона не могу се те две науке развијати. Обе оне живе на обалама исте реке — на обалама оне реке којом струји најдубља мисао — и сва је, чини ми се, разлика међу њима у томе, што прва свршава тамо где друга почиње, док друга почиње онде, где прва свршава.

Бавећи се Канторовом теоријом скупова, а специално проблемом континуума трансфинитних скупова реалних бројева, ја сам и са̂м — nolens, volens — дошао до неких резултата, који улазе у оквир мрачног проблема простора, хипер-простора и континуума. Али се у току мојих студија никад нисам запитао, шта је то простор. Још мање сам се био питао, како се дошло до представе о простору, иако сам знао и знам, да су се при критичком обрађивању тога појма у филозофији појавила и, до дан-данашњега дана, и одржала два различита гледишта и две различите концепције.

Сасвим је, мислим, природно кад кажем, да ја о тим гледиштима и о тим концепцијама свој суд не ћу дати. Ја у та питања не ћу улазити већ ни по томе, што та питања разних филозофских система за нас математичаре нису питања фундаментална. Ми се у математици не питамо, како се дошло до појма о геометријском простору. Ми се не питамо, да ли смо до тог појма дошли емпиричким путем или a priori: за нас математичаре је тај појам дат и ми га можемо по методима наше науке и ширити и, не вређајући тим ни у колико законе логике, стварати — па чак и створити — и појам о простору од n-димензија[5].

Али кад је реч о томе питању, онда могу тврдити и ово. Не мора се у математици ићи само оним путевима, који воде генерализацији појма о порстору, већ се може ићи и оним путем, који cum grano salis води и негацији тога појма. Јер, кад се има у виду то, да је једна геометрија, наслањајући се на само неколико аксиома, могла разгранавањем једног система од само седам тачака да прикупи у једну систему све тачке простора, онда је очевидно да у тој геометрији појам о простору може донекле бити и негиран.

Везујући све саме различите реалне бројеве у различите трансфинитне, неизбројљиве скупове тако, да сваки од тих скупова бројева буде еквивалентан са по једним од оних различитих трансфинитних низова тачака, које су својим насељем засуле једну праву, ја сам и са̂м из само три, међу собом нарочито везана, пројективна низа тачака конструирао један простор, који је по свом бројном различју потпуно еквивалентан са геометријским простором.

Али је, с друге стране, очевидно да фундаменталан елеменат простора не мора бити тачка. Ми можемо, ако хоћемо, за такав елеменат узети и неку другу геометријску слику. Од карактера тог новог елемента пленума зависиће, као што ћемо видети, капацитет и унутрашња структура његова.

Ако бисмо, на пример, за основни елеменат узели праву линију или сферу, онда би простор као пленум тих елемената имао четири димензије — четири зато, што у овом случају бројно различје тих елемената мора бити различје четвртога реда[6].

С друге стране ће, као елеменат пленума, круг формирати простор од шест, а хипербола простор од осам димензија. Свака од тих хипербола биће на име у томе простору одређена тек кад је дат један систем од осам параметара и стога ће и скуп свих тих хипербола уопште одређивати простор од осам димензија.

Тражећи прецрте трансфинитних »природних« скупова нашао сам да ће ти прецрти бити хиперболе, али сам у исто време и синтетичким и аналитичким путем доказао да рој тих хипербола не може формирати један хипер-простор од осам димензија. Такав хипер-простор није могао бити формиран зато, што су се међу прецртима природних трансфинитних скупова појавили неки системи бројева, који су поменуте хиперболе при њихову продирању у простор ограничили и тим ограничењем учинили, да се капацитет њихова ројења смањи.

Студија тих простора вишега реда била је од великог значаја — не само за чисту, већ и за примењену математику — још у оно време кад се мислило, да такви простори немају ничег заједничког са стварношћу. Данас, кад је Ајнштајнов простор од четири димензије постао стварност, испитивање тих простора има и нарочиту дражж, као што ће се то видети по овом једном једином примеру, који ћу поменути.

У хипер-спациалној Геометрији имамо овакво правило: »Кад се креће неко тело четирију димензија, онда се пресек његов с тродимензионалним светом може и мењати.[7]« То значи да облик и величина, као геометријске, карактерне црте некога тела, немају апсолутну вредност. Та је мисао, међутим, у природи реализирана у познатој Лоренцовој контракцији и тако је у реалности потврђена једна чисто геометријска теорема која, као концепција, у самим основама потреса, мути, ломи и крха наше досадашње погледе на свет.

Из тих неколико напомена и објашњења види се, како се у математици и одређује и ствара димензионалност разних простора.

Да видимо сад како су разни погледи на простор изазвали стварање нове, — не-Еуклидове геометрије.

Све до почетка XIX. века нису се геометри у својим погледима на простор ни у чему разликовали од Еуклида и отуда је све до почетка XIX. века геометрија, и аналитична и синтетична, у ствари била Еуклидова Геометрија. Данас, међутим, поред Еуклидове Геометрије имамо и Лобачевскову и Риманову геометрију, а осим тога знамо још и то, да и мимо ове три геометрије, које већ постоје, можемо стварати и друге нове.[8]

По Еуклиду је простор бесконачан. Своју мисао о конфигурацији тог бесконачног простора изразио је Еуклид својим чувеним 5. постулатом[9]. Током пуне две хиљаде година нико није смео дирнути у тај постулат и сви напори математичара ишли су за тим, да се тај постулат докаже[10]. Лобачевски је, међутим, доказао, да се 5. постулат не да извести из осталих постулата, аксиома и дефиниција Еуклидових. Он, Рус револуционар, имао је ту »интелектуалну храброст«, да тај постулат избаци из геометријског система Еуклидовог[11]. Претпоставивши да простор може имати и малу кривину, заменио је Лобачевски 5. постулат својим новим постулатом[12]. Претпоставка о таквој конфигурацији простора имала је огромне последице: открила се једна нова геометрија, која се својим теоремама знатно разликује од Еуклидове[13]. По тим теоремама изгледало би, као да су те две геометрије инконсистентне. Али то није тачно и Лобачевски је, не обарајући систем Еуклидов, створио једну геометрију, која је у свом систему исто тако консистентна и тачна, као и Еуклидова геометрија.

Из сасвим једног другог схватања простора изашла је Риманова Геометрија. По Римановој претпоставци простор није бесконачан, већ само безграничан. По тој би претпоставци Риманова права, са карактера свога, била у оквиру 5. постулата. Риманова Геометрија, другим речима, не искључује 5. постулат. Али то још не значи, да оне пропозиције, које би у Еуклидовој Геометрији биле еквивалентне са 5. постулатом, морају постојати и у Римановој Геометрији.

Примера ради поменућу то, да се у Римановој Геометрији све праве секу. Према томе је јасно, да постулат о уницитету паралелне у Римановој Геометрији не постоји. Тај је постулат истина, у Еуклидовој Геометрији еквивалентан с 5. постулатом, али у Риманову Геометрију — мимо све то, што њезин систем није у контрадикцији с 5. постулатом — тај постулат не може да уђе.

Иако Риманова Геометрија изгледа парадоксална, ипак се зато нове теорије модерне физике у њезином систему развијају. Али и без тога, та геометрија, као идеални геометриски систем, представља модел геометрије коначно́г света[14].

И сад, кад је реч о нашем само сировом и непотпуно одређеном искуству, до кога смо дошли у релативно уском и ограниченом простору, онда можемо, не оспоравајући ни у чему консистентност Лобачевскове и Риманове геометрије рећи, да нам је Еуклидова Геометрија ближа или, како то Poincaré каже »plus commode« него оне друге две. Због тог ограниченог искуства нашег, та је геометрија и дан дањи standard work међу геометријама и с тих разлога је и дошло до тога, да осим библије у целој светској књижевности нема ни једнога дела, које би је бројем својих издања наткрилило[15].

У другом неком свету, ширем од нашег чулног света, и уз други неки разум и друга нека чула, а не она која ми имамо, нашли бисмо можда, да нам је Лобачевскова »хиперболична«, или Риманова »елиптична«, или и некаква сасвим друга геометрија plus commode од »параболичне« Еуклидове геометрије[17], али и тада — у том новом свету — не би се могло рећи, да Еуклидова Геометрија није прецизан израз неких објективних релација у простору Еуклидову.

Да ли тај Еуклидов простор у стварности постоји, то је питање на које Математика не може дати одговор. Математика на име не може рећи ово: простор је бесконачан; она нам не може рећи ни да је простор коначан. У њој се само претпоставља или, да речемо још тачније, у њој се може претпостављати да простор или залази или не залази у бесконачност и из те претпоставке она долази до истина, којима се не потврђује, али у исто време и не негира ни коначност, ни бесконачност његова.

По Њутнову схватању, математика је резултат испитивања и проматрања материалног света. Тај свој поглед на математику Њутн, истина, нигде није тако прецизирао. Поред свега тога ипак се зато зна, да је он о математици тако мислио, јер је тај поглед његов на математику везан за сваку мисао и сваку концепцију његову. И тако он и за геометрију каже да су основе њезине »у механичкој пракси«[18].

Та механика праксе је учинила, да је Ајнштајн у свом физикалном простору морао напустити Еуклидову Геометрију и створити нову, не-Еуклидову, своју »природну« геометрију.

Мерењем, т.ј. експерименталним путем утврдило се на име, да се у читавом једном низу појава и чињеница у Природи не може поставити ред у Еуклидову простору и да тај ред тражи, да време и простор сматрамо као нераздвојљиву целину. Та целина би била један реалан простор четирију димензија, а једна координата у томе простору би била време.

С формалне стране се до таквог простора лако може доћи. Јер кад ми кажемо, да се неко тело креће по правој линији, онда ћемо очевидно то кретање моћи тачно оцртати тек кад знамо време t и број x, који у неком тренутку одређује положај, који тело заузима на правој.

Ако сад ту релацију између вредности t и x хоћемо да изразимо графички, онда је довољно узети, да су t и x координате неке тачке у равни. Слика, коју бисмо тада у Декартовој Геометрији добили, била би веран прецрт поменутог кретања. Та најпростија врста кретања по простору једне димензије била би према томе геометријски објашњена у простору двеју димензија. Али се по томе одмах види 1-во, да ће се кретање неког тела у равни, т. ј. кретање у простору двеју димензија, моћи у слици изразити тек у простору трију димензија, и 2-го, да ће нам у том случају вредности t, x, y представљати једну тачку у тродимензионалном простору.

И, на послетку, ако бисмо претпоставили да се неко тело креће у простору трију димензија и ако бисмо опет хтели да крстање тога тела и у слици изразимо, онда бисмо ту слику могли добити само у простору четирију димензија. Једна димензија тога простора била би, очевидно, и време t, али тачка тог, тако сложеног, простора не би могла бити наша обична тачка. Та би тачка, на име, у једном одређеном тренутку и на једном одређеном месту дала слику једног феномена и она се стога у том природном простору четирију димензија и зове »догађајем«.

Скуп свих таквих тачака био би израз слике стварнога света. Није дакле положај само онај фактор, који нам при проматрању тога света његову тачну слику оцртава. Ту је и време, које је у нераздвојљиву целину везано са простором тако, да нам тек заједница времена и простора може поставити ред међу појавама у природи.

Минковски је предложио[19] и физичари су то и усвојили, да се та заједница или, како он то каже, та »унија« простора и времена назове »светом«. По чулима нашим и по мозгу нашем ми видимо, осећамо и знамо, да се тела распростиру у три димензије. Ми немамо моћи, по којима бисмо могли ту заједницу простора и времена видети и осетити и стога и закључујемо да такав свет четирију димензија у стварности и постоји.

Узроке, са којих ми баш видимо, да простор има три димензије, треба донекле тражити и у физиолошкој структури наших чула и кад бисмо ми имали два ока, у којима би се брзине у њиховим покретима знатно разликовале, онда бисмо вероватно ту потпуну заједницу простора и времена и видели и тада не бисмо морали закључивати, да он realiter и постоји. Ми, као што сам мало час поменуо, тај и такав простор не можемо ни представити, ни чулима нашим опазити, али ако га не можемо ни представити, ни чулима опазити, то не значи да га смемо и можемо и негирати. Lodge лепо каже и ми то врло добро и знамо, да нам је природа дала наша чула зато, да нам буду од помоћи »у борби за живот, а не зато да филозофирамо о свету«[20].

Из целе ове анализе види се, зашто је појам о простору у најтешњој вези са разним геометријским системима и зашто се и појам о коначности или бесконачности простора могао сматрати за фундаменталан појам тих система. Међутим, мада је то тако, ипак зато појам о коначном или бесконачном са природе геометријских метода није могао бити објашњен у самим геометријама. Његово право место је на другим странама наше науке и на тим странама је тај појам специјално по ономе крилу своме, којим он засеца у бесконачност, избио у највише врхове мисли.

Погрешно би било мислити, да је Инфинитезимални Рачун просуо праву светлост на таму у проблему бесконачног. У Инфинитезималном Рачуну, у том уметнички израђеном математичком систему, бесконачно истина игра велику улогу. Тај је систем, ако бих тако смео рећи, сав импрегниран појмом о бесконачном — систем један, у коме се час у откривеном, час у прикривеном облику стално јављају било упоређивања бесконачних количина и њихова међусобна одмеравања; било бесконачни збирови, било бесконачна повијања, нагомилавања, струјења и померања бројева. По тој унутрашњој структури својој с једне и по великим резултатима, који су из ње изашли с друге стране, Инфинитезимални је Рачун најдубља и најлепша лирска песма о бесконачном. Али је поред свега тога истина и то, да се дубље у проблем о бесконачном ушло тек онда, кад је критичко проверавање фундаменталних појмова тога рачуна постало и један од најважнијих проблема математике, а један од тих појмова био је и појам о континуитету функције.

Кад ми кажемо, да се нека функција *in continuo* мења, онда смо тим стварно рекли то, да се тако некакав број мења. Проблем континуитета функције своди се дакле на проблем о континууму бројева. Тај проблем о континууму бројева је међутим везан за појам о броју, а специјално за појам о ирационалном броју и тек, кад је Вајерштрасу, Кантору и Дедекинду[21] пошло за руком, да појам о ирационалном броју објасне, тек тада је био решен и проблем о континуитету функције.

Испитивањем природе ирационалних бројева нашло се, на име, да ће тек њихова бесконачно густа насеља учинити, да скуп свих реалних бројева буде еквивалентан са скупом свих тачака једне праве линије и само се на тај начин и могла поставити корелација између система свих реалних бројева с једне и система свих тачака једне праве с друге стране. По тој корелацији свакој тачки неке праве одговара један реалан број и обратно, сваком реалном броју одговара једна тачка тако, да је континуум у системи реалних бројева нашао свој прецрт тек у скупу свих тачака праве линије и обратно[22]. Са те узајамности, којом је оцртана веза између свих тачака једне праве и свих бројева целокупне области реалних бројева, се континуум реалних бројева и зове »линеарним« континуумом.

Одмах ћемо видети до каквих је закључака о насељима тих система бројева дошао Кантор у својој Теорији Скупова. У тој је теорији управо и расправљен читав комплекс питања, која улазе у проблем бесконачног. У тој значајној теорији, која у ствари улази у оквир идеје о »аритметизирању« математике — у тој се теорији најбоље и види, како се математика тек тим аритметизирањем попела на високи и сјајни престо броја.

У целој тој теорији има два основна појма: појам скупа и појам моћи. Кад различне и одређене објекте или елементе нашег проматрања или мишљења вежемо у једну целину, онда нам та целина даје скуп тих елемената или објеката[23]. Ако је сад број елемената у једном скупу коначан, онда се каже, да је и скуп коначан; а кад у скупу има бесконачно много елемената, онда је такав скуп бесконачан или трансфинитан. За два скупа каже се, да су »еквивалентни«, или да имају исту »моћ«, или исти »кардиналан« број, ако сваком елементу једнога скупа одговара један одређен елеменат другог скупа и обратно, ако сваком елементу другог скупа одговара један одређен елеменат првога. По тој вези, која постоји међу елементима и једног и другог скупа ми кажемо, да су ти елементи у узајамности или у координацији (1, 1).

Кардиналан број показује нам дакле на некакав начин, колико елемената има некакав скуп. И кад ми кажемо ово: m је кардиналан број неког скупа, онда смо тим рекли то, да је тај скуп еквивалентан с неким скупом, у коме има m елемената.

О тим скуповима ми много знамо и из нашег живота. Кад ми, на пример, кажемо, да ће сви људи, који у овом тренутку на земљи живе, умрети, онда смо тим већ нешто одређено рекли о томе скупу живих људи, иако не знамо или, што је још боље речено, иако никад и нећемо моћи сазнати колико их је баш у том тренутку у животу било. Или, кад би се, на пример, узело да у неком свету има бесконачно много људи и да у том свету нема ни поли-андрије, ни поли-гамије, онда бисмо увек могли рећи ово: скупови ожењених људи и удатих жена су еквивалентни или, ти и ти скупови имају исти кардиналан број. Стварним пребројавањем и једног и другог скупа се очевидно никад не би могло доћи до тог резултата и логички је чак много простије утврдити, да ли та два скупа имају исти број елемената, него одредити баш колики је тај број.

»Без те способности духа, по којој можемо некакав објекат w упоредити с неким другим објектом ω', или по којој можемо учинити, да објекат ω одговара објекту ω' или да буде везан за објекат ω' — без те способности, каже Дедекинд[24], уопште не бисмо могли доћи до закона у мишљењу«, и из те способности развила се и цела наука о бројевима, па се према томе тек поред те способности дошло и до појма о еквивалентности трансфинитних скупова. И тек кад је тај појам као фундаменталан појам ушао у област броја, тек од тог времена се и у математици уз појам о »потенциално бесконачном« јавља и појам о »актуално бесконачном«.

У Вишој Анализи је, на пример, бесконачно — било то бесконачно мало, или бесконачно велико — увек потенциално. То је граница нечега ; то је нешто што постаје, што се ствара. Сасвим је друкчије природе Канторово »актуално бесконачно«. То нам се бесконачно јавља н. пр. кад скуп 1, 2, 3, 4, . . . свих целих бројева, или кад скуп 2 . 1, 2 . 2, 2 . 3, 2 . 4, . . . свих парних бројева сматрамо као једну потпуно завршену целину. Ако сад кажемо, да је a кардиналан број скупа свих целих бројева, онда је очевидно по начелу о еквивалентности скупова тај број a и кардиналан број скупа свих парних бројева. Тим се стварно ништа друго није рекло до то, да уз сваки цео број постоји други један који је двапут већи од њега. Али, кад је a кардиналан број и првог и другог скупа, онда можемо рећи да се цели бројеви мноштвом[25] својим не разликују од мноштва парних бројева, иако је оних више него ових.

Такве трансфинитне скупове, који имају исти кардиналан број као и скуп природних бројева назвао је Кантор »избројљивим« скуповима.

Упоређујући сад два к о н а ч н а скупа A и B један с другим, моћи ћемо рећи ово: или је $A = B$, или је $A < B$, или је $A > B$. Од те три могућности може постојати само једна. Код трансфинитних скупова ће се тај систем релација $=$, $<$ или $>$ сасвим изменити. Ми смо мало час видели, да скуп A свих целих бројева и скуп B свих парних бројева имају исти кардиналан број a. По томе, што је A целина, а B део те целине, је $A > B$, а по томе што и A и B имају исту моћ је $A = B$. У овом случају је дакле и $A = B$, и $A > B$.

Међутим је Кантор дошао до тог резултата, да се скуп свих тачака неке праве или, што је једно и исто, скуп свих реалних бројева, у смислу његову »не да изобројити«, т. ј. да се не може поставити узајамност (1, 1) између елемената скупа свих природних бројева и скупа свих реалних бројева. Кардиналан број c скупа свих реалних бројева био би дакле већи од кардиналног броја a скупа свих природних бројева[26], а слика целокупне системе реалних бројева би овако изгледала: она би већ као насеље рационалних бројева била насеље бесконачне густине; то насеље би се још више појачало бесконачно густим насељем алгебарских ирационалних бројева, а највише — и то бесконачно пута више — ће се оно појачати насељем трансцендентних бројева.

На само двадесет година пре него што ће Кантор тако изразити свој поглед о насељима разних категорија реалних бројева, Лиувил је нашао, да трансцендентни бројеви уопште и постоје, а већ двадесет година после тога Лиувиловог проналаска утврдило се, да управо ти бројеви својом целином дају главно обележје систему бројева и да се у њему алгебарски бројеви — били они рационални или ирационални — јављају само спорадички[27].

Но, иако је мноштво тих трансцендентних бројева тако велико по обиму своме, ипак се данас само за неке бројеве заиста и зна, да су трансцендентни. Такви би на пример, били бројеви e и π. И да би се видело од колике је важности то, што се утврдило да је π трансцендентан број, поменућу само ово: да је трансцендентан карактер броја π дао решење једном историјском проблему — чувеном проблему квадратуре круга. То решење може се укратко овако формулирати: квадратура круга не постоји[38].

Други важан резултат до кога је Кантор у теорији скупова дошао, формулиран је једном од најлепших и најзначајнијих теорема математике. Том теоремом је изражена ова мисао: да је скуп свих тачака, које леже на страни једног квадрата, еквивалентан са скупом свих тачака које се у том квадрату налазе. То значи, да на неки начин у целом квадрату има исто онолико тачака, колико их има и на једној страни његовој. Континуум квадрата, т. ј. континуум слике двеју димензија био би дакле еквивалентан са континуумом линеарним.

Како је на тај начин континуум једне површине својим прецртом ушао у састав континуума једне праве, то изгледа као да је тим нестало и сваке разлике између једног и другог континуума, а то ће рећи, да је нестало и сваке разлике између простора двеју и простора једне димензије. Међутим, тек кад се утврдило да непрекинутом низу тачака у простору двеју димензија не одговара и непрекинут низ тачака у његову прецрту на једној правој — тек тада се увидело да Канторово схватање о тим прецртима није у сукобу са појмом димензионалитета неке геометријске слике.

Ти и такви, њима слични, резултати и проблеми, које многи — не схватајући довољно ни логички смисао појма о скупу, ни дубину његову — нису хтели да приме, изазвали су немир у духовима и учинили су да се математичари поделе на два крила: на десно крило интуициониста и лево — Канторово — крило формалиста и због тога ни до данас, баш у самом критичком периоду математичке анализе, није дошло до стабилизације неких појмова. И тако данас у математици видимо једну појаву, које у њеној историји нема: видимо на име, како два различита правца и две различите мисли избијају на оштрицама оних мачева, које су укрстили математичари једног и другог крила.

Својом сумњом и одбацивањем неких резултата, до којих се у науци о скуповима дошло, интуиционисти су учинили, да се више светлости и више логичке оштрине проспе по мрачним питањима теорије бесконачног. То је један без сумње позитиван успех интуициониста. С друге стране, и упоредо с тим, пошло је интуиционистима за руком, да се из велике области онога, што се по начелу tertium non datur не може порећи, издвоје и тачно омеђе они делови математике, који се сами собом логички намећу.

Али, зато ипак они нису успели, да онај други систем — систем формалиста — оборе. И данас у напорима својим и једни и други — и формалисти и интуиционисти — иду за тим, да се и један и други систем аксиоматизира. А кад се дође до аксиома, који имају да обележе неки поглед или, рецимо, чак и неку истину у једној области на граници између објективног и субјективног, између логике и, рекао бих, догме и унутрашњег уверења, које нам је сама наша психа наметнула — кад се, велим, до таквих аксиома дође, онда је јасно да ће се обе системе и даље упоредо развијати. Јер о аксиомима ми можемо мислити како хоћемо; ми за њих можемо рећи, да су они конвенције или, да су они судови *a priori*; ми можемо неке од њих примити, а неке и одбацити, али кад се већ неки од њих приме, онда ће и у једном и у другом крилу оно, што се из њих буде развило, морати бити логички тачно, а то ће — и то је оно што нико не ће одрећи — бити велики добитак за науку. И Канторова Теорија Скупова не само да је створила »рај« [из кога се проблем о бесконачном не може потиснути, већ ће она и у будућности, за дуго време још, бити једно од најплоднијих области математичких спекулација]— најплоднија по томе, што ће та теорија без сумње и надаље својим погледима и резултатима натапати широка поља и Геометрије и Анализе[29].

Испитивањем проблема бесконачног бавио сам се и ја и држећи се при томе стално Канторових фундаменталних погледа дошао сам до неких резултата, који засецају и у Геометрију и у Анализу. Покушаћу да те резултате *in nuce* саопштим Академији.

Ослањајући се на узајамност (1, 1), која постоји међу елементима трансфинитних пројективних низова тачака, ја сам претпоставио: 1-во, да су ми дата три нарочита, »природна« пројективна низа тачака и 2-го, да се ти природни низови по једном одређеном закону поклапају на једној правој, која ће им бити заједничка носиља. По тој претпоставци види се: 1-во, да ће ти низови бити суперпонирани и 2-го, да ће свака тачка заједничке им носиље имати карактер тринитета. У систему једначина, које сам из тих претпоставака добио, јављају се два параметра. Ти параметри имају две црте у своме карактеру: *по једној црти свога карактера они изазивају промене у основном склопу самих низова, а по другој, они из првобитног, основног трансфинитног скупа бројева издвајају нарочите трансфинитне скупове, који се од основног скупа разликују само тим, што су у њима због узајамности (1, 1)* на нарочит један начин распоређени елементи *првобитног, основног скупа*.

По тим особинама назвао сам те параметре трансформаторима или генераторима трансфинитних природних скупова и доказао сам :

1-во, да ће ти генератори моћи створити свега $c \cdot c = c^2$ различитих распореда елемената првобитног насеља и

2-го, да ће свакој тачки у простору одговарати у опште само један једини елеменат скупа свих тих различитих распореда елемената првобитног насеља и обратно, да ће сваком елементу скупа свих различитих распореда одговарати у опште само једна једина тачка у простору.

Скуп свих тачака у простору био би дакле еквивалентан са скупом свих елемената свих одређених — различитих — распореда тако, да ће се у оном тренутку, у коме ће трансфинитни природни скупови по својој моћи убацити и последњи број у последњи, још могући, распоред елемената првобитног насеља — да ће се, велим, у том тренутку попунити и последње, још непопуњено и празно место у простору и тада ће, очевидно, оним различјем трећега реда, које ће се том приликом формирати, бити у целини обухваћен и конструиран и геометријски простор трију димензија.

Тако формиране системе природних, суперпонираних, трансфинитних скупова или, боље рећи, тако формирана транс финитна бројна различја, која се у систему тих трансфинитних скупова уопште могу појавити, нашао сам ја и у једној диференциалној једначини и по томе могао сам формулирати овакву једну теорему: Бесконачна насеља у систему природних, суперпонираних, трансфинитних скупова представљају својим различјем скупове вредности партикуларних интеграла једне одређене диференциалне једначине првога реда. Сваки од тих партикуларних интеграла представља једну криву линију. Скуп свих тачака те криве линије одговарао би једном нарочитом распореду елемената првобитног насеља тако, да би тај распоред елемената представљао прецрт дате криве линије у систему природних трансфинитних скупова[30].

Тако је Канторова идеја о континууму и идеја о актуално бесконачном ушла у Математику и како математика својом идејом обухвата и реални и идеални свет, то бисмо се можда могли запитати, да ли је тај појам о континууму и појам о бесконачном у стварности и реализиран? Одговор на то питање биће, као што ћемо видети, негативан.

По хипотези о молекуларном саставу материје, материја се састоји из атома. Ти атоми састоје се из позитивних и негативних електрона и они се везују у привидни континуум један за другога по фундаменталном закону Електростатике — по закону Coulomb-ову. Материја је дакле електрицитет и она се ни као електрицитет безгранично не може делити.

Исто тако стојимо и са енергијом. И њу делећи доћи ћемо до неких граница, које се при том дељењу не могу прећи — доћи ћемо до познатих кваната Планкових. Нигде се, према томе, у »стварном« свету не сусрећемо са бесконачним у правцу бесконачно малога. У томе свету, другим речима, не постоји бесконачно мало, а кад у томе свету бесконачно мало не постоји, онда у њему не може постојати ни хомогени континуум. Такав континуум могао би, на име, бити реализиран само у бесконачно маломе. Ово у томе свету не постоји; према томе у том свету не може постојати ни хомогени континуум.

С друге стране, по ономе што се данас зна о стварном свету, изгледа да се у том свету не сусрећемо са бесконачним ни у правцу бесконачно великих количина. Мишљење, по коме би се свет распростирао у бесконачност, сматрало се у дугом низу година као тачно. Све до Канта, па чак и после њега, мислило се, да је простор бесконачан[31]. Међутим се експерименталним проматрањем света утврдило, да се хипотеза о бесконачности света тешко може одржати и Ајнштајн је, примењујући у Космологији своје законе о гравитацији, нашао да коначност света није искључена.

Са тих разлога је Ајнштајн и морао напустити Еуклидову Геометрију, која га је силом своје системе везивала за појам о бесконачности простора и са тих разлога се, с друге стране, теорија Риманових простора баш у наше дане у многим правцима и развија[32].

Бесконачно, према свему томе, по резултатима до којих је наука дошла, не би стварно постојало ни у микрокосмосу, ни у макрокосмосу и ми смо, изгледа, још пре појаве Канторових трансфинитних бројева, тај појам о бесконачном примили у математику као реалан и фундаменталан појам његовог система само зато, што смо проматрајући било оно што је врло мало, било оно што је врло велико, још могли — некад чак и морали — закључити, да иза свега тога може или и мора бити било и нечег још мањег, било и нечег још већег. И то је сасвим природно — природно по томе, што је објекат математичког света количина, а ова као појам a priori сама »у себи« обухвата све мене кроз које ова може проћи и сва стања у којима се она може јавити: од стања које би било изражено бројем $x = 0$, до стања које би представљао број $x = \infty$[33].

Но поред појма о бесконачном стабилизирао се у математици и појам о хомогеном континууму простора. Дедекинд је, на име, својим »засецима« показао на врло прост начин, како се по идеји хомогеног континуума може конструирати скуп свих реалних бројева. У томе скупу јављају се и рационални и ирационални бројеви и ови последњи ушли су специално у тај скуп зато, да би се могла попунити и празна места, које рационални бројеви на правој линији, и поред свег бесконачно честог насеља свог, нису могли заузети. Ми имамо дакле, две врсте тачака у простору: једне представљају рационални бројеви, а друге, т. ј. она празна места, ирационални бројеви. Трансфинитни скупови и првих и других дају простору обележје континуитета. По нашим чулима — ма како оштра она била — и по нашим инструментима — ма како прецизни они били — већ би сам скуп рационалних бројева давао слику континуума праве. О неким празним местима, и поред идеалне егзистенције њихове, не би могло бити ни говора.

Зато би се, мислим, имајући све то у виду и враћајући се на слику стварнога света, могло рећи, да и поред хипотезе о дисконтинуитету материје идеални простор постоји и по оним местима која материјалне тачке стварно заузимају, и по оним празним местима, која оне не заузимају. Стварност је дакле само један мали део оног бесконачног круга на који се распростире идеја броја, а број је по безграничној моћи својој господар васионог света. Стари би то овако рекли: ὁ θεὸς ἀριθμητίζει — и заиста, имали су право стари: Бог управља и влада бројем.

Напомене и објашњења.

[1] Питагора је хтео да »аритметизира« математику. На томе путу аритметизирања њезина зауставили су га инкомензурабилни бројеви: Њему је изгледало да ти бројеви уопште и нису бројеви. — v. Russell, Einführung in die mathem. Philosophie, 1923. p. 4. (превод с енглеског).

[2] v. Weierstraß, Ueber continuirliche Functionen etc., Werke II. p. 71. — Вајерштрас је конструирао ову функцију:

$$f(x) = \sum_{n=0} b^n \cos(a^n x \pi)$$

и претпоставио је: 1. да је x реално и променљиво; 2. да је a непаран цео број, а b нека позитивна стална количина, чија је вредност < 1. Функција $f(x)$ мења се без прекида, али чим производ ab пређе извесну границу, онда та функција нема одређен диференциални количник ни за какву вредност x-а. — Пре него што ће Вајерштрас то саопштити Берлинској Академији Наука, мислило се 1. да једногране функције једног реалног аргумента, које се без прекида мењају, имају и свој извод и 2. да је вредност тога извода само на неким местима неодређена или бесконачно велика.

[3] Цела филозофска теорија Калкулуса била је за Лајбницова времена у потпуној тами. Сам Лајбниц није о основним појмовима тога рачуна имао израђене погледе. — v. Russell, Principles of Mathematics, p. 325.

[4] v. Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie, 1900. p. 2—3.

[5] Треће основно питање Кантове Теорије Сазнања је ово: »како су могући синтетички судови a priori«. На то питање Кант даје одговор у својој Критици Чистога Разума — у оном одељку њезином, који он назива Трансценденталном Диалектиком. (Упор. Др. Бран. Петронијевић, Основи теорије сазнања, 1923. стр. 129.). У одговору на то питање геометријски аксиоми су били примери, којима се доказивало, да су такви судови могући. По томе што такви судови постоје и што се они »mit Notwendigkeit« сами собом намећу, закључио је Кант, да је простор један a priori дат облик нашег опажаја. (v. Helmholtz, Ueber den Ursprung und Bedeutung der geometr. Axiome. Vorträge und Reden. Bd. II.). По Канту појам о простору пре-егзистира дакле у нашем разуму и као такав он нема никакве везе са искуством. То гледиште Кантово је субјективно. Према њему стоји Њутнова објективна концепција простора (v. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, Cantabrigiae,

1686, у предговору). По Њутну је простор једно засебно, празно биће које поред појединих реалних ствари постоји; то је једно биће, које те ствари у себи садржи и које би било ту и кад тих ствари не би ни било у њему. По овом схватању долази се до опажаја тек искуством. —

Међу великим научницима нашега времена заступао је Кантово гледиште Поенкаре. (v. Poincaré, Des fondements de la Géométrie, Bibliotheque de synthèse scientifique, Paris), а оно друго, емпиричко, Хелмхолц (Helmholtz, l. c.).

Математички би се питање о проблему простора могло овако формулирати. Простор је група, а у свакој групи имамо облик и материју. У Геометрији је материја бројно различје (Zahlenmannigfaltigkeit) трију димензија. По Хелмхолцу материја постоји пре облика; по Поенкаре-у, обрнуто, облик постоји пре материје. По првом схватању је геометрија експериментална наука, а по оном другом, она не може бити експериментална наука (p. Poincaré, l. c. p. 60.—62.).

[6] Праву линију и сферу одређују у простору трију димензија четири параметра. Према томе је јасно, да ће бројно разилчје тих параметара бити различје четвртога реда v. John Wesley Young, Fundam. Concepts of Algebra and Geometry, 1911, p. 171.—175.

[7] v. A. S. Eddington, Raum, Zeit und Schwere, 1923. p. 59. — превод с енглеског.

[8] Г. Хилберт поделио је аксиоме геометријске у пет група. Изгледа да се тим аксиомима не може додати ни један нов други (v. Poincaré. Dernières pensées, p. 265.). У петој групи тих аксиома налазе се аксиоми о континуитету. Први међу тим аксиомима је Архимедов аксиом V_1, а други је, тако звани »Axiom der Vollständigkeit« — аксиом V_2.

Г. Хилберт је доказао да има бесконачно много геометрија које постоје поред аксиома I—IV и V_1, а да с друге стране постоји само једна једина геометрија — обична Декартова аналитична геометрија, у којој уз оне друге вреди још и аксиом V_2. — в. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1909. p. 2—27.

[9] Тај постулат се у неким издањима Еуклидових Елемената — стихија — појављује у реду аксиома на 11. месту. Стога се он често зове и 11. аксиомом. У Елементима је тај постулат овако формулиран: »и ако једна права пресеца две праве и ако она с овима на истој страни својој изнутра затвара углове, који су укупно < 2 R, онда те праве, продужене у бесконачност, треба да се сусретну на оној страни, на којој леже углови, који су < 2 R«.

[10] После пропасти античке културе бавили су се о теорији паралелних правих најпре Арапи. Зна се да је Nasir Eddin (13. век) хтео да докаже 5. постулат. После Арапа, од Обнове до почетка 19. века, расправљан је проблем 5. постулата у читавом једном низу радова. Нарочито су у 18. веку на том проблему радили многи математичари и, међу овима и неки највећи (Lagrange, D'Alembert, Laplace, Carnot и Gauß) тако, да се у праскозорју 19. века могла већ назрети не-Еуклидова Геометрија.

Резултати, до којих се дошло, утврдили су да 5. постулату одговарају еквивалентно ове пропозиције:

1-во, кад је дата нека права и нека тачка изван те праве, онда се кроз ту тачку може повући само једна права паралелно са датом правом;

2-го, постоје две копланарне праве, које немају заједничке тачке и које су еквидистантне;

3-ће, има сличних троуглова, који нису конгруентни;

4-то, збир углова у неком троуглу је = 2 R;

5-то, има ректилинеарних троуглова, који имају површину онолико велику, колико се хоће.

Да је 1. пропозиција еквивалентна са 5. постулатом, то је још Еуклид знао. —

[11] v. Mach, Erkenntnis und Irrtum, 1906. p. 410. — Ту храброст нису имали ни Лагранж, ни Гаус. То ћу потврдити овим чињеницама. — Лагранж је запазио, да обрасци сферне тригонометрије не зависе од 5. постулата. Стога је мислио, да се тај постулат може и доказати. Али, кад је у једној седници Академије почео читати своју расправу о паралелним линијама, он одједном при том читању стаде и склопивши хартије своје испред себе и својих другова, рече: »Il faut que j'y songe encore«. — А за Гауса се зна, да је већ од г. 1792. почео мислити на неку нову, »анти-Еуклидову Геометрију«. Иако је Гаус имао потпуно израђене погледе о тој новој геометрији, која не зависи од 5. постулата, ипак их он није смео да објави. Пишући 1829. г. Беселу о тој геометрији, каже Гаус у том писму, да ту своју геометрију, бојећи се »вике Беотаца«, за свога живота не ће ни објављивати.

[12] Претпоставка Лобачевскова је ово. Кад се из неке тачке P, која лежи изван неке праве x, повуче нормала p на ту праву x, онда се кроз тачку P у равни (p, x). могу повући ове три врсте правих: 1-во, секанте; 2-го, праве које нису секанте и које све скупа леже у једном углу, који се зове »угао паралелизма« и 3-ће, две паралелне, које одвајају систем секаната од оних правих које нису секанте. — То претпостављајући заменио је Лобачевски 5. постулат овим постулатом: Кроз неку тачку, која лежи изван неке праве могу се повући у равни, коју та тачка и та права одређују, две праве паралелно са том правом, а осим тих двеју правих има још и бесконачно много других, које ту праву не секу.

[13] У Лобачевсковој Геометрији је, на пример, збир углова у неком троуглу < 2 R; само у граници може тај збир бити и $\doteq 2$ R. — Опширна излагања о не-Еуклидовој Геометрији налазе се у ова два дела: 1-во, Engel-Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, 1896. и 2-го, Bonola-Liebmann, Die Nichteuklidische Geometrie, 1919.

[14] Риман је пошао од појма о количини — од тог општег појма у чији оквир улази и појам о простору. У тој геометрији: 1-во, свака је права коначна; 2-го, збир углова у неком троуглу је > 2 R; 3-ће, две праве одређују простор. Од ове три пропозиције прва је у контрадикцији са 2., а последња у контрадикцији са 6. постулатом Еуклидове Геометрије. — v. Riemann, Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde

liegen, Werke, p. 254. и Rougier, La philosophie géométrique de Henri Poincaré, 1920.

[15] v. Poincaré, Des fondements etc. p. 63.

[16] Досад је штампано око 1700 разних издања Еуклидових елемената. v. Baldus, Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik, 1924. p. 6.

[17] Те три геометрије везане су и за меру кривине простора. По тој мери се Еуклидова Геометрија и зове параболичном, Лобачевскова хиперболичном, а Риманова елиптичном геометријом. У првој је мера кривине простора $= 0$, у другој > 0, а у трећој < 0. — v. Voß, Über das Wesen der Mathematik, 1908, p. 79. и Rougier, l. c. p. 50.

[18] v. William Spottiswoode, Die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften, 1879. стр. 2. (превод с енглеског). —

[19] v. H. Thirring, Die Idee der Relativitätstheorie, 1922, p. 69.

[20] v. A. S. Eddington, l. c. p. 34.

[21] Кад је страна неког квадрата $= 1$, онда је диагонала тог кдадрата дата бројем $\sqrt{2}$. Таквог броја чији би квадрат био број *2* нема у системи рационалних бројева. Ако се на име сви рационални бројеви поделе у два разреда и то тако, да у једном разреду буду сви бројеви чији су квадрати мањи од 2, а у другом сви они чији су квадрати већи од 2, онда ће очевидно број $\sqrt{2}$ бити опкољен двема системама бројева, који ће својим вредностима струјити према броју $\sqrt{2}$. Они бројеви чији су квадрати мањи од *2* не ће тада имати свој максимум, а они чији су квадрати већи од *2* не ће имати свој минимум. По Дедекиндовој дефиницији »засека« на томе месту, на коме би требао да буде број $\sqrt{2}$ не би могао бити ни један рационални број. То би место било »празно« и да не би на том месту било прекида у системи бројева, Дедекинд је то место попунио ирационалним бројем $\sqrt{2}$. — v. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1912. p. 5—19 и Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 1919. p. 2—5,

[22] Кантор је први ту корелацију тако формулирао (v. G. Cantor. Math. Annalen, св. 5.) и зато се она обично и зове »Канторовим аксиомом«.

[23] То би била Канторова дефиниција скупа. — v. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 1923. p. 3.

[24] v. Дедекиндову примедбу у књизи Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 1879. p. 470 и Dedekind, Was sind und was wollen die Zahlen, 1923. p. IV.

[25] Мноштво = Vielheit.

[26] Кантор је мислио да између трансфинитних кардиналних бројева *a* и *c* не лежи никакав други трансфинитан кардиналан број. До данас још никоме није пошло за руком да тај Канторов поглед било докаже, било обори.

[27] Г. Мих. Петровић је нашао читаву једну класу одређених интеграла — моћи континуума — чије вредности могу бити само Лиувилови трансцендентни бројеви.

[28] Кад се каже: квадратура круга не постоји, онда је тим речено само то, да се проблем квадратуре круга не може решити онако, како су то стари замишљали, т. ј. да се не може врстаром и шестаром конструирати један квадрат, чија би површина била равна површини круга. — v. F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standtpunkte aus, 1924. p. 256. —

[29] v. Hilbert, Ueber das Unendliche, Mathem. Annalen, B. 95. p. 180. и Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, 1914. Note IV.: Les polémiques sur le transfini et sur la démonstration de M. Zermelo, p. 135.—181.

[30] Аритметичким проматрањем показао је Peano, а геометријским Hilbert, како се без прекида врше прецрти тачака неке криве на тачке једног дела површине. Прецрт који Хилберт добија, овакве је природе: он се врши без прекида и при томе свакој тачки линије одговара једна тачка површине (квадрата); обрнуто, свакој тачки квадрата одговарају или једна или две или четири тачке линије. — v. Hilbert, Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, Mathem. Annalen, B 38. p. 459.

По мојој концепцији свакој линији одговара један одређен распоред бројева. Као целина, ти, нарочито распоређени, бројеви представљају на правој слику дате линије.

[31] v. Hilbert, Über das Unendliche, l. c. p. 164.

[32] v. Cartan, La géométrie des espaces de Riemann; Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. IX. 1925.

[33] v. Couturat, De l'infini mathématique, 1896. p. 555. —