ЈЕДАН ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ ЈЕДНОГРАНИХ АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА.

Б. ГАВРИЛОВИЋ.

Нека је са F (z) обележена једна једнограна аналитичка функција комплексне промењљиве количине z. Промотримо ту функцију у једном делу равни, који би био омеђен неком кривом линијом s. У том делу равни уочићемо ма где неку тачку a. Та тачка биће или обична, или сингуларна тачка функције F (z).

Ако је a обична тачка функције F (z), онда ће се у области те тачке функција F (z) моћи изразити једним потенциалним редом овог облика:

$$F(z) = A_0 + A_1 (z-a) + A_2 (z-a)^2 + \ldots$$

Ако би тачка a била нула функције F (z) — и то нула m — тога реда — онда би морало бити

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{m-1} = 0 .$$

Функција F (z) морала би тада имати овакав облик:

$$F(z) = (z-a)^m \left[A_m + A_{m+1} (z-a) + \ldots\right],$$

т. ј. ако је a нула m-тога реда за функцију F (z), а

$$A_m + A_{m+1} (z-a) + \ldots = G(z), \qquad (1)$$

онда би у том случају било

$$F(z) = (z-a)^m \; G(z).$$

По реду (1) види се, да је тачка a и обична тачка функције G (z). Но како је $G(a) = A_m \neq 0$, то је уједно јасно и то, да тачка a не може бити нула функције G (z).

Међутим, ако се узме, да је тачка a сингуларна тачка функције F (z), онда би се функција F (z) у области те тачке дала овако изразити:

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} A_n (z-a)^n + \sum_{1}^{\infty} \frac{B_n}{(z-a)_n},$$

а у изразима, који се јављају на десној страни последње једначине, био би први израз уређен по позитивним, а други по негативним степенима разлике $z-a$. Ако би сад у изразу

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{B_n}{(z-a)^n} = \frac{B_1}{(z-a)} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots \qquad (2)$$

број чланова био коначан и ако би последњи члан тога израза био $\frac{B_m}{(z-a)^m}$, онда би тачка a била пол m-тога реда за функцију $F(z)$; а ако би број чланова у изразу (2) био бесконачан, онда би тачка a била есенциална тачка функције $F(z)$.

Познато је, да је Вајерштрас први испитао природу есенциалне тачке[1]) и да је он први одредио изразе оних једнограних аналитичких функција, које би имале у неком делу равни неограничен број полова, а ограничен број есенциалних тачака[2]). Г. Митаг-Лефлер наставио је испитивања Вајерштрасова[3]) и одредио је изразе и оним аналитичким једнограним функцијама, које би у неком делу равни имале и бесконачно много есенциалних тачака. Свакој сингуларној тачци неке функције — била она пол или есенциална тачка те функције — одговарала би у аналитичком изразу те функције једна нарочита карактеристична функција, по којој би се одмах могла одредити и природа саме синуларне тачке.

Ми ћемо нарочито промотрити природу неке једногране функције $F(z)$ у оном делу равни, који је омеђен контуром s и претпоставићемо да у том делу равни функција $F(z)$ има само једну сингуларну тачку. У самом том делу равни описаћемо око ге тачке један мали круг c тако, да у површини, чије би међе биле линија s и круг c, функција $F(z)$ нема ниједне сингуларне тачке. Тада ћемо, *a priori*, имати пред собом само ову чињеницу: или ће функција $F(z)$ имати коју нулу у оном делу равни, који би био омеђен контурама s и c, или је неће имати. Ако та функција у том делу равни буде имала коју нулу и то нулу m — тога реда, онда ће та нула бити прост пол за ло-

---

[1]) v. **Picard**, Traité d' *Analyse*, t. II. p. 120.

[2]) **Weierstrass**, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*. Abhandl. der Berl. Akademie der Wissenschaften, 1876.

[3]) **Mittag-Leffler**, Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. Acta Mathém, t. IV. 1884.

гаритамски извод функције F (z), а остатак тога пола био би цео позитиван број m.[1]) Између тих нула, ако би их било, уочићемо сад ону, која је најближа нашој сингуларној тачци a и описаћемо око наше сингуларне тачке још један круг C, који би допирао до те нуле, која јој је најближа. У прстену, који би се налазио између кругова c и C не ће тада функција F (z) имати ни једну нулу; према томе би у том прстену дата сингуларна тачка била једина сингуларна тачка не само за функцију F (z), већ и за њен логаритамски извод. Тај логаритамски извод могао би се дакле у том прстену овако изразити:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = A_0 + A_1 (z-a) + A_2 (z-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots \qquad (3)$$

и у том изразу био би коефициенат B_1 остатак тог логаритамског извода. Ако је сад a пол m — тога реда за функцију F (z), онда ће остатак B_1 логаритамског извода његовог бити цео број и то цео негативан број: $B_1 = -m$. Међутим, тај остатак биће цео број и тада, кад је тачка a есенциална тачка функције F (z), и то ћемо доказати на овај прост начин. Помножићемо са dz и десну и леву страну израза (3) и извршићемо интеграцију његову. Тада ће се добити ово:

$$\log F(z) = \sum_{0}^{\infty} A'_n (z-a)^n + \sum_{1}^{\infty} \frac{B'_n}{(z-a)^n}$$
$$+ B_1 \log (z-a),$$

а отуд је

$$F(z) = e^{\Sigma A'_n (z-a)^n} \, e^{\Sigma \frac{B'_n}{(z-a)^n}} \, (z-a)^{B_1} \qquad (4)$$

То би дакле био израз функције F (z). Како је та функција по претпоставци једнограна, то се види да B_1 мора бити цео број. У сваком случају је дакле остатак логаритамског извода неке једногране аналитичке функције цео број и тај број је онај број, који у свакој тачци — била она обична, била она пол, била она есенциална тачка функције — одређује ред тих функција.[2])

---

[1]) v. **Lindelöf**, Le *Calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, p. 20. —

[2]) **B. Gavrilović**, *O redovima jednogranih funkcija*. Rad Jugoslav. Akad., knj. 143.

Имајући у виду образац (4) моћи ћемо сад на врло прост начин показати, како се нека функција, која би у контури s имала једну сингуларну тачку, може изразити производом двеју функција, од којих је једна изражена редом, који је уређен по позитивним, а друга редом, који је уређен по негативним степенима разлике z-a.

У изразу (4) јављају нам се три фактора. Први и други могу се очевидно развити у бесконачне редове. Један од тих редова био би уређен по позитивним, а други по негативним степенима разлике z-a. Међутим је B_1 цео број. Ако је он позитиван, онда ћемо први од поменутих редова помножити $(z-a)^{B_1}$ и тада ћемо опет добити један ред, који би био уређен по позитивним степенима разлике z-a. А ако би B_1 био негативан број, онда ћемо други од поменутих редова помножити са $(z-a)^{B_1}$ и тада би се тим множењем добио један ред, који би био уређен по негативним степенима разлике z-a. Функција F (z) добила би тада облик:

$$F(z) = G(z-a).\ H\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

а остатак B_1 логаритамског извода њезиног утицао би на облик функција G и H на тај начин, што би најнижи степен разлике z-a у функцији G био B_1, кад би остатак B_1 био позитиван број, а најнижи степен те разлике у функцији H био $-(B_1 - 1)$, кад би остатак B_1 био негативан број.