О СИСТЕМАМА ФОКАЛНИХ КРУГОВА.

НАПИСАО

БОГДАН ГАВРИЛОВИЋ.

Нека је $S = o$ еквација неког коничног пресека, н. пр. неке елипсе, а $L = 0$ еквација неке праве. Тада ће[1]) еквација

$$S - k L^2 = 0 \qquad (1)$$

представљати све коничне пресеке који су у двојном додиру с елипсом дуж праве L. Кад та еквација представља један круг, онда се такав круг по Гревсу[2]) зове фокалним кругом. Ако је дакле

$$S \equiv ax^2 + by^2 + c,$$

а

$$L \equiv Ax + By + C,$$

онда ће еквација (1) представљати круг само ако је

$$k = \frac{a - b}{A^2 - B^2}, \; ABk = 0. \qquad (2)$$

Пошто параметар k није раван нули, то ће према погодбама (2) морати бити или $A = 0$, или

[1]) Види моју *Аналитичну Геометрију* p. 715.

[2]) *Jbid.* p. 729.

$B = 0$, или $A = B = 0$. Овај последњи случај искључује се међутим сам собом по томе, што би еквација $L = 0$ тада представљала праву у бесконачности; према томе може се тврдити, да ће круг $S - k L^2 = 0$ бити у двојном додиру са елипсом S само ако је било $A = 0$, било $B = 0$. Засад ћемо се ограничити само на погодбу $B = 0$, т. ј. *претпоставићемо да додирна корда иде упоредо са осовином* y. Узмимо сад да је елипса S реална. У том случају ће бити $a \gtrless 0$, $b \gtrless 0$, $c \lessgtr 0$; на пример, нека је $c < 0$, а $b > a > 0$. Велика осовина елипсе биће тада један део осовине x, а права L њи ће упоредо са малом осовином њеном. Како ће еквација фокалног круга бити овог облика:

$$A^2 b (x^2 + y^2) + 2AC (b - a) x + C^2 (b - a) + A^2 = 0, \quad (3)$$

то ће тај круг бити реалан ако је[1]

$$C^2 a (a - b) - A^2 bc > 0.$$

Пошто су $a - b$ и c негативне количине:

$$a - b = - r^2, \qquad c = - s^2,$$

то ће се та неједнакост моћи овако написати:

$$C^2 ar^2 < A^2 bs^2,$$

а одатле је

$$\frac{C^2}{A^2} < \frac{bs^2}{ar^2},$$

---

[1]) Фокалан круг био би реалан и кад би било $C^2 a (a - b) - A^2 bc = 0$, само што би у том случају еквација $S - k L^2 = 0$ представљала две изотропне праве, које се гранају из жижа елипсиних према фокусоидима бесконачне равни.

т. ј.

$$\frac{C^2}{A^2} < \frac{bc}{a(a-b)}.$$

Ако сад обележимо са d раздаљину управнице од средишта елипсиног, биће

$$d^2 = \frac{bc}{a(a-b)},$$

а то значи, да ће фокалан круг елипсе S бити реалан само ако је по апсолутној вредности

$$\frac{C}{A} < d.$$

Отуда ова теорема:

Теорема. *Сви фокални кругови неке елипсе су реални кад се додирна корда креће између управница паралелно са малом осовином те елипсе.*

Координате средишта круга (3) су ово:

$$\alpha = \frac{C(a-b)}{Ab}, \ \beta = 0,$$

т. ј. средишта свих реалних фокалних кругова леже на великој осовини елипсиној, а апсциса α имаће највећу апсолутну вредност кад је $\frac{C}{A}$ максимум, а најмању, кад је $\frac{C}{A}$ по апсолутној вредности минимум. У првом случају је $\frac{C}{A} = d$; у другом је $\frac{C}{A} = 0$, а тим смо доказали ову теорему:

Теорема. *Средишта свих реалних кругова, што дирају елипсу дуж неке корде која иде упоредо са малом осовином, леже између жижа елипсиних.*

Додирна корда сећи ће међутим елипсу у реалним тачкама само ако је по апсолутној вредности

$$-\frac{C}{A} \leqq \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

т. ј. фокални кругови биће у реалном додиру са елипсом, само ако је

$$-\frac{C}{A} \leqq \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Нека је

$$-\frac{C}{A} = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

У том случају ће права L бити тангента елипсе у темену њеном A (или у темену A'), а фокалан круг биће у том темену у хипероскулацији са датом елипсом. Координате средишта тога круга биће по апсолутној вредности ово:

$$\alpha = \frac{b-a}{b}\sqrt{-\frac{c}{a}},\ \beta = 0,$$

а то ће рећи, да ће средишта оних реалних фокалних кругова, који су у реалном двојном додиру са елипсом S, лежати у размаку

$$\left(\frac{b-a}{b}\sqrt{-\frac{c}{a}},\ \frac{a-b}{b}\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$$

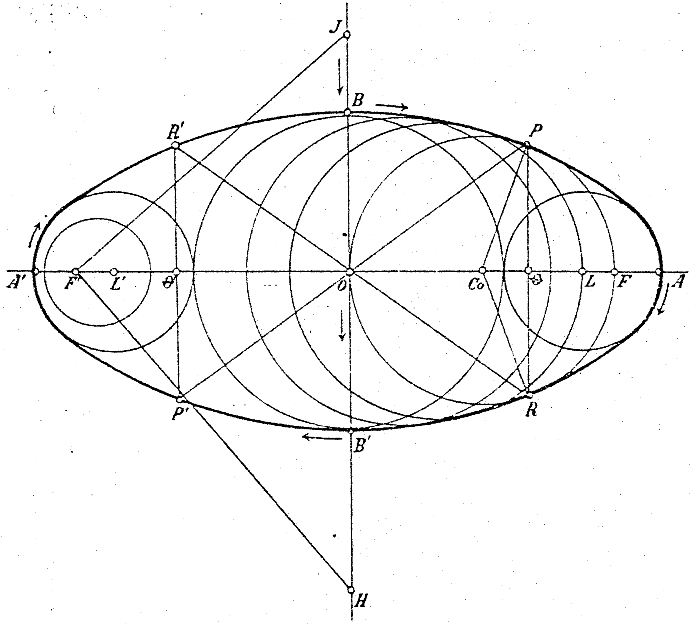
на великој осовини те елипсе. Но како је еволута елипсе

$$ax^2 + by^2 + c = 0$$

аналитички одређена овом еквацијом:

$$\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{c\,(a-b)}{ab}\right]^{\frac{2}{3}} = 0,$$

то ће координате оних двеју завратних тачака



Сл. 1.

L и L' њених, што леже на великој осовини елипсиној, бити ово:

$$\xi = \pm \frac{b-a}{b} \sqrt{-\frac{c}{b}}, \; \eta = 0.$$

Према томе смо доказали ову теорему:

Теорема. *Средишта реалних фокалних кругова, који су у реалном додиру са неком елипсом дуж додирне корде што иде упоредо са малом осовином,* *налазе се на главној осовини између двеју завратних тачака еволутиних.*

Узмимо сад да нам је дато средиште C_0 оног фокалног круга, који је одређен посебном вредношћу m_0 параметра $m = -\frac{C}{A}$, па нека су су P и R оне тачке у којима додирна корда $x = m_0$ сече елипсу. Тај фокалан круг зваћемо кругом *(PR)*. Јасно је, да ће се нормале повучене на елипсу у тачкама P и R сећи у тачци C_0. Како је средиште C_0 тачка унутрашњег краја еволуте елипсине, то ће се из те тачке моћи повући четири реалне нормале на елипсу. Те нормале биће праве $C_0 A$, $C_0 R$, $C_0 A'$ и $C_0 P$. Према познатој Јоахимсталовој теореми мораће тачке A, R, A', P' лежати на једном кругу. По тој истој теореми мораће с друге стране и тачке A', R', A, P лежати на једном кругу. *Сваком фокалном кругу (PR) одговараће дакле по два Јоахимсталова круга.* Један од тих Јоахимсталових кругова пролази, а други не пролази кроз тачку P. *Средиште оног Јоахимсталовог круга који пролази кроз тачку P лежи,* као што ћемо одмах доказати, *испод велике осовине елипсине; средиште оног другог Јоахимсталовог круга који не пролази кроз P лежаће напротив изнад велике осовине, а оба средишта тих кругова леже према средишту елипсе симетрички на малој осовини њеној.* У опште ће средишта свих Јоахимсталових кругова, о којима је у овај мах реч, бити према средишту елипсе симетрички распоређена, два и два на малој осовини њеној.

То се веома лако може доказати. Нека је

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

еквација елипсе S. Ако су α, β координате средишта фокалног круга, и ако су x', y' координате тачке P, а x_1, y_1 координате средишта оног Јоахимсталовог круга, који пролази кроз тачку $P'(-x', -y')$, биће[1])

$$x_1 = 0, y_1 = \frac{a^2}{2b^2}\frac{\alpha}{x'}y',$$

или, пошто је $x' = m_0$, а $\dfrac{\alpha}{m_0} = e^2$, то ће бити

$$x_1 = 0, \; y_1 = \frac{c^2}{2b^2}y'.$$

Тим је утврђено оно, што смо мало час тврдили. Лако се може увидети да фокалном кругу $(P' R')$ одговарају иста она два Јоахимсталова круга, што одговарају и кругу (PR). Та два Јоахимсталова круга поклапају се само кад је средиште фокалног круга једна од оних двеју завратних тачака еволуте што леже на великој осовини елипсе и у *том случају је тај двојни Јоахимсталов круг главни круг елипсин.* Ако је на име средиште фокалног круга једна од оних поменутих двеју завратних тачака еволутиних, онда ће бити $y' = o$, а кад је $y' = o$, онда ће тачка P бити теме A (a, o) елипсе S, а тачка P' теме A' $(-a, o)$. Стога је и у једном, и у другом случају $y_1 = o$, т. ј. средиште Јоахимсталова круга биће уједно и средиште елипсе, а полупречник његов је одмерен бројем a.

Нека је сад $y' = b$. У том случају биће $x' = o$, т. ј. круг (PR) биће са елипсом у двојном додиру дуж мале осовине њене. Означимо са J средиште

---

[1]) Види моју *Аналитичну Геометрију*, р. 572.

Јоахимсталова круга што пролази кроз теме B'. Пошто је $y' = b$, биће координате тачке J ово:

$$x_1 = o, \; y_1 = \frac{c^2}{2b}.$$

По томе се види, *да се тачка J конструктивно може овако одредити.* Одмерићемо на малој осовини почевши од тачке 0 у правцу негативних ордината дуж $OH = 2b$; затим ћемо тачку H спојити једном правом с једном жижом, н. пр. са жижом F' и повући ћемо кроз тачку F' праву $F'J$ управно на праву HF'. Тачка у којој та управна сече малу осовину биће средиште J поменутог Јоахимсталовог круга. Сличним путем нашли бисмо и средиште J' Јоахимсталовог круга што пролази кроз теме B. *Између тих двеју тачака J и J' лежаће на малој осовини елипсиној средишта свих Јоахимсталових кругова,* па пошто су координате тачке J' ово:

$$x'_1 = o, \; y'_1 = -\frac{c^2}{2b},$$

то ће и координате средишта ма ког Јоахимсталовог круга бити ово:

$$x_1 = o, \; y_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,\frac{c^2}{2b} \tag{4}$$

тако, да ће ордината средишта ма ког Јоахимсталовог круга бити функција једног параметра λ, чија се вредност налази у размаку (o, ∞).

Тим параметром λ *моћи ћемо у осталом изразити ма коју тачку елипсину.* Означивши ординату крајне тачке P додирне корде PR са y', видели смо мало час да је

$$y_1 = \frac{c^2}{2b^2}\, y',$$

што ће рећи да је

$$y' = \frac{2b^2}{c^2} y_1,$$

па пошто тачка P може бити ма која тачка елипсина, то ћемо координате њене обележити са x, y и обележивши их тако, моћи ћемо y изразити на овај начин:

$$y = \frac{2b^2}{c^2} y_1.$$

Према вредности, коју има y_1 под (4), биће

$$y = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} b,$$

па је с тога

$$x = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} a.$$

Тим параметарским еквацијама:

$$x = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} a, \quad y = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} b \tag{5}$$

могли бисмо дакле аналитички изразити једну елипсу и тако смо, тражећи везу између кретања средишта поменутих Јоахимсталових кругова и кретања оних тачака, у којима реални кругови стоје у реалном двојном додиру са елипсом, добили поменуте две у Аналитичној Геометрији познате еквације (5), само што су те еквације изведене у нас на сасвим новим основама. По нашем схватању претварају се на име *једним одређеним алгебарским процесом елементи једног низа тачака (Punktreihe) у тачке елипсине тако, да ће се кретањем неке тачке по некој правој или, боље рећи, по једном ограни-*

чем делу неке праве, изазвати кретање једне тачке која мора описати једну елипсу.

Кад бисмо у еквацијама (5) испред $\sqrt{\lambda}$ узели знак плус, добили бисмо једну тачку оног дела елипсиног, што лежи у првом или четвртом квадранту, а кад бисмо узели знак минус, онда бисмо добили ону другу половину елипсину. Једном вредношћу параметра λ биће дакле свакад еквацијама (5) одређене по две крајне тачке корде PP' или корде RR' елипсине. Кад се покретна тачка крене у правцу назначене стрелице (сл. 1.) из тачке J према средишту елипсе, кренуће се тачка што описује елипсу, с једне стране у правцу назначене стрелице из тачке B према тачци A, а с друге стране из тачке B према тачци A' и описаће том приликом с једне стране лук BA, а с друге стране лук BA'. Кад покретна тачка по ограниченој дужи JO дође у тачку O, онда ће тачка што описује елипсу, доћи у тачку A или у тачку A'; кад она прва, идући по дужи OJ', пође из тачке O према тачци J', поћи ће она друга с једне стране из тачке A према тачци B', а с друге стране из тачке A' према тачци B' и описаће при томе кретању део AB' и део $A'B'$ дате елипсе. У првом случају креће се параметар λ само у границама $(o, 1)$, а у другом у границама $(1, \infty)$, па пошто свакој вредности параметра λ одговара појединачно на поменутим деловима елипсе по једна тачка, то изгледа, као *да ће на деловима AB' и $A'B'$ тачке у елипсе бити много збијеније, но тачке на деловима њеним BA и BA'.*

Узмимо сад да је $\lambda = \mu^2$, т. ј. $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$. Тада ће бити

$$x = \frac{2\mu}{1+\mu^2}\,a,\ y = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\,b.$$

Ако је дакле φ *ексцентрична аномалија појединих тачака елипсиних, а*

$$\sin\psi = \frac{2\mu}{1+\mu^2},\ \cos\psi = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2},$$

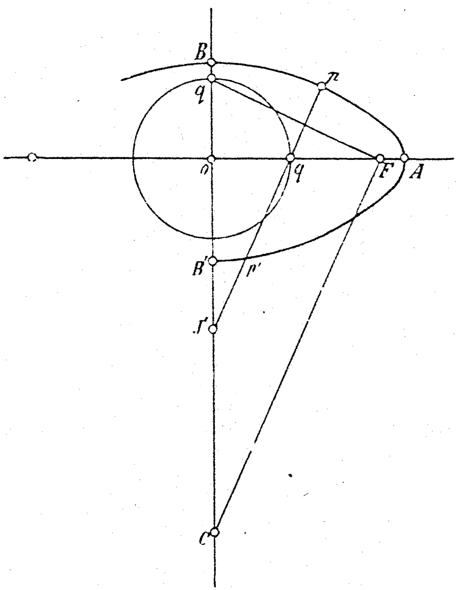
т. ј.

$$\mu = tg\,\frac{\psi}{2},$$

онда ће бити

$$\psi = 90^0 - \varphi.$$

Да видимо сад како ћемо наћи на елипси тачку



Сл. 2.

p, за коју ћу бити $Bp = pA$? Ако су x, y координате тачке p, биће

$$x^2 + (y-b)^2 = (x-a)^2 + y^2$$

или

$$ax - by = \frac{c^2}{2}. \qquad (6)$$

Према томе је јасно да ће тачка p бити она тачка, у којој ће права (6) сећи елипсу. Та права одсеца на осовинама делове

$$Oq = \frac{c^2}{2a}, \; OJ' = -\frac{c^2}{2b},$$

па се стога она конструктивно врло лако може одредити. Пошто свака права сече елипсу у двема тачкама, то ћемо имати два решења; биће дакле и $Bp' = p'A$, кад је $Bp = pA$. На питање, како те две тачке p и p' леже на елипси, одговорићемо овако. Како је

$$ax - by = \frac{c^2}{2},$$

биће

$$\frac{2\mu a^2}{1+\mu^2} - \frac{(1-\mu^2)\,b^2}{1+\mu^2} = \frac{c^2}{2}$$

или

$$(3b^2 - a^2)\,\mu^2 + 4a^2\,\mu = a^2 + b^2.$$

Ако корене ове еквације обележимо са μ' и μ'' биће

$$\mu' + \mu'' = \frac{4a^2}{a^2 - 3b^2}, \; \mu' \mu'' = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - 3b^2}$$

или

$$\mu' + \mu'' = \frac{4a^2}{c^2 - 2b^2}, \; \mu' \mu'' = \frac{a^2 + b^2}{c^2 - 2b^2}.$$

Параметри μ' и μ'' што одређују положај тачкама p и p' на елипси, имаће дакле позитиван знак, кад је $c > b\sqrt{2}$, т. ј. тачке p и p' лежаће обе на елипси десно од мале осовине њене. Напротив, кад је $c < b\sqrt{2}$, онда ће тачке p и p' лежати на различитим странама осовине $2b$. И, на послетку, ако је $c = b\sqrt{2}$, онда ће један између корена, н. пр. корен μ', бити бесконачно велики тако, да ће тачка p' заузети положај тачке B': кад је дакле за неку елипсу $c = b\sqrt{2}$, онда је $B'B = B'A$.

Погодба под којом четири тачке μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 леже на једном кругу. — Према једној познатој Јоахимсталовој теореми биће четири тачке елипсине, чије су ексцентричне аномалије α_1', α_2', α_3', α_4', концикличке, ако је

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4' = 2n\pi. \qquad (7)$$

Узмимо сад да је

$$\alpha'_i = \frac{\pi}{2} - \alpha_i.$$

Тада ћемо погодбу (7) моћи овако изразити:

$$\pi - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} = n\pi,$$

а по томе је

$$tg\,\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} = 0.$$

Међутим је

$$\mu_1 = tg\,\frac{\alpha_1}{2},\ \mu_2 = tg\,\frac{\alpha_2}{2},\ \mu_3 = tg\,\frac{\alpha_3}{2},\ \mu_4 = tg\,\frac{\alpha_4}{2},$$

а то ће рећи, *да ће тачке* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4,$ *бити концикличке*, ако је

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 \mu_4 + \mu_3 \mu_4 \mu_1 + \\ + \mu_4 \mu_1 \mu_2) = 0 \tag{8}$$

или

$$\Sigma \mu_1 - \Sigma \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0.$$

Та погодба може се и овако написати:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4} - \left(\frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{1}{\mu_2 \mu_3 \mu_4} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_3 \mu_4 \mu_1} + \frac{1}{\mu_4 \mu_1 \mu_2}\right) = 0, \tag{8$^+$}$$

па се стога на основи тих двеју релација може на овај начин генерализирати једна позната *Cazamian*-ова теорема[1]):

Теорема. *Кад тачке* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ *неке елипсе леже на једноме кругу, онда ће на једноме кругу лежати:*

1. *Тачке* $-\mu_1, -\mu_2, -\mu_3, -\mu_4$;

2. *Тачке* $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}, \frac{1}{\mu_4}$;

3 *Тачке* $-\frac{1}{\mu_1}, -\frac{1}{\mu_2}, -\frac{1}{\mu_3}, -\frac{1}{\mu_4}$.

Ваља поменути као допуну овој теореми то, да тачке μ и $-\frac{1}{\mu}$ симетрички леже на елипси према

[1]) **v. Cazamian.** *Sur les points d'une conique situés sur un même cercle*, Nouv. Ann. III. t. 13. p. 389.

средишту њеном, док ће тачке μ и $\frac{1}{\mu}$ с једне, и μ и $-\mu$ с друге стране, симетрички лежати на елипси према осовинама њеним.

Оскулација. Нов доказ Штајнерове теореме. — Узмимо да тачке μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 леже на једном кругу. Ако је тај круг у оскулацији са елипсом, онда ће бити:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu.$$

Погодба (8) биће дакле у овом случају овог облика:

$$\mu^3 + 3\mu_4 \mu^2 - 3\mu - \mu_4 = 0. \qquad (9)$$

По тој еквацији види се да ће у опште свакој вредности параметра μ_4 одговарати по три вредности параметра μ, а то ће рећи, *да ће кроз сваку тачку елипсину пролазити по три оскулаторна круга.* Тим би већ био доказан први део Штајнерове теореме.[1]) Тачке, у којима су ти кругови у оскулацији са елипсом, добили бисмо решењем еквације (9). Означимо корене те еквације са μ_1, μ_2 μ_3,. Тада ће бити:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = -3\mu_4,$$

$$\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_3 \mu_1 = -3,$$

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = \mu_4,$$

---

[1]) **v. Steiner.** Werke, t. II. p. 347. и *Encyklopädie der math. Wissensch.* III. C 1. p. 75.

а то се релације могу и овако написати:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = -2\mu_4,$$

$$(\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_3 \mu_1)\mu_4 = -3\mu_4,$$

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = \mu_4.$$

Сабравши последње две еквације и одузевши од њих ону прву, добићемо овај резултат:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 \mu_4 + \mu_3 \mu_4 \mu_1 + \\ + \mu_4 \mu_1 \mu_2) = 0,$$

а по томе се види *да ће тачке* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ *лежати на једном кругу*. Тим би на веома прост начин био доказан и други део поменуте Штајнерове теореме.

Еквација (9) може се међутим написати и у овом облику:

$$\frac{1}{\mu^3} + 3\frac{1}{\mu_4}\frac{1}{\mu^2} - 3\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_4} = 0.$$

Отуда ова теорема:

Теорема. *Кад три круга што пролазе кроз тачку* μ_4 *неке елипсе оскулирају елипсу у тачкама* μ_1, μ_2, μ_3, *онда ће оскулаторни кругови што пролазе кроз тачку* $\frac{1}{\mu}$ *додиривати елипсу у тачкама* $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}$.

Сличним путем могле би се формулирати још две теореме о оскулаторним круговима што пролазе кроз тачку $-\mu_4$ и тачку $-\frac{1}{\mu_4}$.

Поларе и њихове обвојнице. Нека је

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

еквација елипсе. Фокални кругови њени биће у том случају одређени овом еквацијом:

$$a^2 (x^2 + y^2) - 2mc^2 x + m^2c^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Полара неке тачке (x', y') према којем му драго фокалном кругу је

$$a^2 (xx' + yy') - mc^2 (x + x') + m^2 c^2 - a^2 b^2 = 0,$$

а обвојница те праве је крива

$$c^2 (x + x')^2 - 4a^2 (xx' + yy' - b^2) = 0. \tag{10}$$

Та еквација представља међутим једну параболу, чија осовина иде упоредо са малом осовином елипсином.

Отуда ова теорема:

Теорема. *Обвојница полара неке тачке према свима фокалним круговима једне елипсе јесте једна парабола чија осовина иде упоредо са малом осовином елипсином.*

Кад се пол (x', y') креће по равни, онда ће еквација (10) представљати читав један рој парабола, али ће при томе осовине свих тих парабола ићи упоредо са малом осовином елипсином. Те ће параболе бити према томе хомотетичне, а тим смо доказали ову теорему:

Теорема. *Обвојнице полара различитих полова према свима фокалним круговима* (*PR*) *неке елипсе јесу хомотетичне параболе.*

По еквацији (10) види се још и ово:

1-во, да ће права

$$xx' + yy' - b^2 = 0$$

т. ј. полара тачке (x', y') према кругу

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

дирати поменуту параболу у оној тачци, у којој је сече права $x + x' = 0$ и

2-го, да ће се та парабола изметнути у систему двеју паралелних правих само ако је $y' = 0$, т. ј. само кад пол лежи на великој осовини дате елипсе; те две праве биће реалне и различите, кад је x' по апсолутној вредности својој веће од c, т. ј. кад пол лежи на великој осовини изван жижâ елипсиних; оне ће бити имагинарне, кад је $|x'| < c$, т. ј. кад пол лежи између жижа и на послетку, еквација (10) представљаће једну реалну двојну праву, кад је пол било једна, било друга жижа.

Ортоптички кругови системе фокалних кругова. — Познато је, да је место тачака из којих се могу повући на некакав коничан пресек по две тангенте, које се секу под правим углом, један круг. Тај круг зове се ортоптичким кругом. Уочимо сад еквацију

$$a^2 (x^2 + y^2) - 2m c^2 x + m^2 c^2 - a^2 b^2 = 0 \qquad (11)$$

фокалних кругова елипсе (a, b). Лако се може доказати да ће ортоптички круг тог фокалног круга бити аналитички одређен овом еквацијом:

$$a^4 (x^2 + y^2) - 2ma^2 c^2 x + m^2 c^2 (a^2 + b^2) - 2a^4 b^2 = 0.$$

Како је са m обележен један параметар, то ће нам последња еквација представљати једну систему кругова. Обвојница те системе биће крива

$$a^4 c^2 x^2 - (a^2 + b^2) [a^4 (x^2 + y^2) - 2a^4 b^2] = 0.$$

Та еквација може се међутим написати у овом облику:

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{2b^2} = 1,$$

та се према томе може формулирати оваква теорема:

Теорема. *Обвојница ортоптичких кругова системе фокалних кругова неке елипсе јесте једна са датом влипсом конфокална елипса.*

Иверсне слике фокалних кругова. — Средиште елипсе узећемо за средиште инверсије. Инверсна слика системе фокалних кругова (11) биће аналитички изражена овом еквацијом:

$$m^2 c^2 (x^2 + y^2) - 2c^2 x m - a^2 [b^2 (x^2 + y^2) - 1] = 0,$$

а обвојница тог роја кривих је крива

$$c^2 x^2 + a^2 (x^2 + y^2) [b^2 (x^2 + y^2) - 1] = 0,$$

т. ј. крива

$$(x^2 + y^2 - 1) (x^2 + y^2 + 1) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Обвојница инверсних кругова системе фокалних кругова је дакле једна крива четвртог степена, која пролази кроз тачке у којима круг инверсије сече дату елипсу, а у опште се може доказати оваква теорема:

Теорема. *Инверсна слика обвојнице неког роја кривих линија јесте обвојница инверсних слика свих кривих тога роја.*

Нека је на име некакав рој кривих линија одређен овом еквацијом:

$$f(x, y, m) = 0.$$

Из те еквације и еквације $\frac{df}{dm} = 0$ елиминираћемо сад параметар m. Обвојница роја датих кривих линија биће дакле аналитички изражена овом еквацијом:

$$f(x, y, \varphi(x, y)) = 0. \qquad (12)$$

Но кад су тачке $P(x, y)$ и $P'(x', y')$ инверсне, и кад је полупречник круга инверсије $r = 1$, онда је

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Ако дакле краткоће ради узмемо да је

$$X = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad Y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2},$$

онда ће инверсна слика обвојнице (12) бити аналитички изражена овом еквацијом:

$$f(X, Y, \varphi(X, Y)) = 0. \qquad (13)$$

Међутим је еквација инверсне слике криве $f(x, y, m) = 0$ ово:

$$F(X, Y, m) = 0.$$

Та еквација представља такођер рој кривих линија, а обвојница тога роја кривих линија је очевидно крива (13), као што смо то мало час и тврдили.

Место полова неке праве према системи фокалних кругова. Еквација поларе тачке (x, y) према ма ком фокалном кругу (PR) може се овако изразити:

$$(a^2 x - mc^2) X + a^2 y Y + m^2 c^2 - mc^2 x - a^2 b^2 = 0.$$

Та тачка (x, y) биће пол дате праве

$$u X + v Y + w = 0,$$

ако је

$$\frac{a^2 x - mc^2}{u} = \frac{a^2 y}{v} = \frac{m^2 c^2 - mc^2 x - a^2 b^2}{w},$$

а одатле је

$$(a^2 x - mc^2) v = a^2 y u,$$

$$a^2 y w = (m^2 c^2 - mc^2 x - a^2 b^2) v.$$

Ако из те две условне еквације елиминирамо m, добићемо овакав резултат:

$$b^2 v^2 x^2 - (a^2 + b^2) uv x y + a^2 u^2 y^2 - c^2 v w y - b^2 c^2 v^2 = 0, \qquad (14)$$

па пошто је та еквација квадратна по количинама x, y, то ће и место полова праве $uX + vY + w = 0$ бити у опште једна крива другога реда. Разред те криве другога реда одређен је, као што се зна, овом разликом:

$$\delta = (a^2 + b^2)^2 u^2 v^2 - 4a^2 b^2 u^2 v^2,$$

а по томе се види да је

$$\delta = u^2 v^2 c^4.$$

Та количина δ биће према томе или $= 0$ или > 0, т. ј. *место полова или ће припадати разреду парабола или разреду хипербола.*

1-во. *Нека је* $\delta = 0$. У том случају или ће бити $u = 0$, или $v = 0$, или $c = 0$. Аке је $u = 0$, т. ј. ако дата права иде упоредо са великом осовином елипсином, онда ће еквација (14) представљати једну параболу; ако је $v = 0$, т. ј. ако дата права иде паралелно са малом осовином елипсином, онда ће место полова бити сама осовина x; и на послетку, ако је $c = 0$, т. ј. ако је $a = b$, онда ће се еквација (14) преобразити у ову еквацију:

$$(vx - uy)^2 = 0,$$

а то ће рећи, да ће еквација (14) представљати једну двојну праву, која је из средишта елипсиног повучена управно на праву (u, v, w). У том последњем случају не ћемо међутим имати рој фокалних кругова, већ само *један једини* круг

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

па ће стога и *једна једина* тачка праве $ux - vy = 0$ бити пол дате праве. Координате те тачке су ово:

$$x = - \frac{a^2 u}{w}, \; y = - \frac{a^2 v}{w}.$$

2-го. *Нека је* $\delta > 0$. У том случају ће еквација (14) представљати једну хиперболу, чије асимптоте иду упоредо са овим двема правима:

$$b^2 v^2 x^2 - (a^2 + b^2) uv\, xy + a^2 u^2 y^2 = 0.$$

Те две праве не ће променити свој правац докле год је $- \frac{u}{v} = const.$, *па ће стога и еквација (14) пред-*

стављати систему од бесконачно много хомотетичних хипербола, кад се права (u, v, w) *буде кретала по равни не мењајући својега правца.*

Та хипербола (14) изметнуће се у две праве кад је

$$\begin{vmatrix} 2b^2 & (a^2+b^2)\,u^2 & 0 \\ (a^2+b^2)\,u^2 & 2a^2\,u^2 & c^2\,w \\ 0 & -w & 2b^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (15)$$

а ту је погодбу такођер лако протумачити. Ако развијемо детерминанту на левој страни еквацијē (15), добиће та погодба овај облик:

$$c^2\,u^2 - w^2 = 0,$$

а одатле је или

$$cu + w = 0,$$

или

$$cu - w = 0.$$

Те две еквације одређују међутим аналитички жиже елипсине. *Место полова изметнуће се дакле у две праве кадгод дата права* (u, v, w) *пролази кроз ма коју жижу елипсину.*

Повуцимо сад кроз једну од тих двеју жижа, н. пр. кроз жижу $F'\,(-c, o)$ једну праву (u, v, w). Тада ће се место (14) полова изметнути у ове две праве:

$$2a^2\,u\,y = v\,[(a^2+b^2)\,x + c^3 \pm c\,(c\,x + a^2 + b^2)],$$

а то ће рећи у праву

$$y = \frac{v}{u}\,(x + c),$$

и праву

$$y = \frac{b^2 v}{a^2 u}(x - c).$$

Прва између ових двеју правих пролази кроз жижу F' и стоји управно на правој (u, v, w), а она друга пролази кроз жижу F и иде упоредо са дијаметром који одређују корде што иду у правцу праве (u, v, w).

Исто би се тако могло доказати и ово: ако кроз жижу F повучемо ма у ком правцу неку праву, онда ће једна од оних двеју правих, у које ће се изметнути место (14) полова, пролазити кроз жижу F и стојати управно на правој (u, v, w); она друга права пролазиће међутим кроз жижу F' и ићи ће упоредо са поменутим дијаметром.

Пошто је пол праве $uX + vY + w = 0$ према елипси (a, b) одређен координатама

$$x = -\frac{a^2 u}{w}, y = -\frac{b^2 v}{w},$$

то ће тај пол бити једна тачка места (14), а то ће рећи, *да ће пол неке праве према датој елипси лежати на месту полова системе фокалних кругова (P R) те елипсе.*

Поларно узајамне слике коничних пресека према фокалним круговима. — Узећемо поново елипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и поред ње систему фокалних кругова њених. Еквацију поларно узајамне слике те елипсе према ма ком фокалном кругу њеном могли бисмо одредити по једном познатом општем методу, који би се аналитички могао овако илустрирати. Нека је $\varphi(x, y, z) = 0$ хомогена еквација помоћног коничног пресека (у овај мах хомогена еквација фокалних кругова), а

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

хомогена еквација елипсе. Тада би поларно узајамна слика те елипсе била аналитички одређена овом еквацијом:

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \varphi'_x \\ h & b & f & \varphi'_y \\ g & f & c & \varphi'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ми ћемо међутим ту поларно узајамну слику одредити на много простији начин.

Нека је тога ради са φ обележена ексцентрична аномалија неке тачке елипсине. Еквација тангенте повучене у тој тачци на елипсу биће тада ово:

$$\frac{\cos\varphi}{a} X + \frac{\sin\varphi}{b} Y - 1 = 0.$$

Та тангента треба да буде полара фокалних кругова. Према томе ће пол (x, y) те поларе бити одређен овом системом еквација:

$$\frac{\cos\varphi}{a(a^2 x - mc^2)} = \frac{\sin\varphi}{a^2 by} = -\frac{1}{m^2 c^2 - mc^2 x - a^2 b^2}.$$

Ако из тих еквација елиминирамо непознат параметар φ, добићемо ову еквацију:

$$a^2 (a^2 x - mc^2)^2 + a^4 b^2 y^2 = (m^2 c^2 - mc^2 x - a^2 b^2)^2,$$

и то би већ била еквација поменуте поларно узајамне слике.

Та еквација може се написати овако:

$$(a^6 - m^2 c^4) x^2 + a^4 b^2 y^2 - 2mc^2 (a^4 - m^2 c^2 + a^2 b^2) x +$$
$$+ m^2 c^2 (a^4 - m^2 c^2 + a^2 b^2) - a^4 b^4 = 0$$

или, пошто је апсциса средишта фокалног круга одређена бројем $\alpha = me^2$, овако:

$$e^4 (a^2 - \alpha^2) x^2 + b^2 e^4 y^2 - 2\alpha e^2 [(a^2 + b^2) e^2 - \alpha^2] x +$$
$$+ \alpha^2 [(a^2 + b^2) e^2 - \alpha^2] - e^4 b^4 = 0, \qquad (16)$$

или на послетку, и овако:

$$a^2 b^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) + c^2 (a^4 - m^2 c^2 +$$
$$+ a^2 b^2) (x - m)^2 = 0. \qquad (17)$$

По овој последњој еквацији види се, да ће поларни конични пресеци, о којима је у овај мах реч, бити са елипсом (a, b) у двојном додиру дуж праве $x = m$, т. ј. да ће они бити са елипсом у двојном додиру дуж додирне корде фокалнога круга, а по еквацији (16) види се опет с друге стране, да ће поларни конични пресеци бити:

1-во, елипсе, кад је $\alpha < a$, т. ј. кад се средишта фокалних кругова налазе између темена A и A' дате елипсе;

2-го, хиперболе, кад је $\alpha > a$, т. ј. кад се средишта фокалних кругова налазе изван темена A и A'; и

3-ће, параболе, кад је $\alpha = 0$, т. ј. кад се средишта фокалних кругова налазе у самим теменима A и A'.

Ми ћемо се ограничити само на оне поларне криве, које одговарају реалним фокалним круговима. Средишта тих кругова леже између жижа елипсе (a, b), т. ј. поларно узајамне слике елипсе (a, b) према тим круговима $(P R)$ биће елипсе. Координате средишта такве једне елипсе су:

$$x' = \frac{(a^2 + b^2) e^2 - \alpha^2}{e^2 (a^2 - \alpha^2)} \alpha, \; y' = 0,$$

т. ј. средишта те елипсе леже на главној осовини дате елипсе. Кад је $\alpha = 0$, онда је и $x' = 0$; кад је $\alpha = c$, онда је $x' = c$, а то ће рећи да средишта оних поларних кривих, што одговарају реалним фокалним круговима, леже између жижа дате елипсе.

Још ћемо поменути само ово. Кад је $\alpha = ae^2$, онда је завратна тачка L средиште фокалног круга; тада је тај круг управо у хипероскулацији са елипсом и он одваја реалне фокалне кругове који стоје у реалном двојном додиру дуж праве $x = m$ од оних реалних фокалних кругова, који су у имагинарном двојном додиру са елипсом. Том специјалном кругу одговара као поларна слика елипса

$$(2a^2 - b^2) x^2 + a^2 y^2 - 4 (a^2 - b^2) x + (2a^2 - 3b^2) a^2 = 0,$$

која се, као што се лако може потврдити, може аналитички и овако изразити:

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) + 2 (a^2 - b^2) (x - a)^2 = 0.$$

Средиште те елипсе је ова тачка:

$$x' = \frac{2ac^2}{a^2 + c^2}, \; y' = 0,$$

а по томе се види, да се координате средишта поларне елипсе могу изразити и овако:

$$x' = ae^2 \frac{2a^2}{2a^2 - b^2}, \; y' = 0,$$

па пошто је $\frac{2a^2}{2a^2 - b^2} > 1$, то је и $x' > ae^2 = OL$.

Кад је $\alpha = c$, онда је еквација поларно узајамне слике ово:

$$(x - c)^2 + y^2 = 0;$$

елипса (16) ће се дакле у том случају изметнути у систему двеју изотропних правих, што се секу у жижи $F(c, o)$.

Поменућемо још само то, да би било врло интересанто проучити дубоку, унутрашњу везу која постоји између фокалних кругова који додирују елипсу дуж корде $x = m$ и оних фокалних кругова који је додирују дуж корде $y = n$.