ЈЕДАН НОВ ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ БРОЈЕВА.

НАПИСАО

Богдан Гавриловић.

(ПРИКАЗАНО НА ОКУПУ АКАДЕМИЈЕ ПРИРОДНИХ НАУКА 7. ЈУНА 1904.)

Познато је, да је Ајлер доказао,[1]) да се производ ових збирова:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2, \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 \qquad (\alpha)$$

може на четири различита начина изразити производом четири квадрата. Ту теорему Ајлерову генерализирао је знаменити талијански геометар Бриоски. Он је доказао[2]), да се производи збирова

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2, \quad b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_8^2 \qquad (\beta)$$

могу изразити збиром од осам квадрата. Пошто сад у збировима (α) имамо 2^2 чланова, а у збировима (β) свега 2^3 чланова, и пошто се производ прва два збира може изразити збиром од 2^2 чланова, а производ друга два збира збиром од 2^3 чланова, то је онда *Genocchi* покушао да докаже[3]) једну општу теорему, по којој би се производ два збира од 2^n квадрата могао на више различитих начина

[1]) *Acta Petropolitana.* I. 2. p. 48.

[2]) *Crelle's Journ. für die reine und angew. Mathem.* t. 52.

[3]) *Annali di matem. pura ed applic.* t. III.

изразити збиром од 2^n квадрата. Робертс је међутим доказивао [1]), да та теорема постоји само кад је $n \leqq 3$, т. ј. да она може обухватити само Ајлерову и Бриоскијеву теорему и та тврђења његова примио је као тачна и Арну.[2]) С друге стране је опет Пухта доказао [3]), да докази Ђенокијеви не вреде и да његова теорема у најопштијем случају не обухвата ни Ајлерову, а камо ли Бриоскијеву теорему. Питање о ширењу Ајлер-Бриоскијеве теореме је дакле према свему томе остало потпуно нерешено, и у та питања до данас нико више није улазио и ако су се у последње време неки научници бавили о сродним и потпуно сличним питањима.[4]) Ја сам, као што ће се из овога рада видети, на првом месту доказао, да Ђенокијева теорема постоји уз веома мала ограничења и кад је $n = 4$; осим тога доказао сам још и неколико теорема, којима су несумњиво генерализиране и Ајлерова и Бриоскијева теорема.

Да бих та тврђења доказао, узећу да је

$$
\begin{array}{ll}
a_1 = \alpha_1 + i\ \alpha_2, & b_1 = \beta_1 + i\ \beta_2, \\
a_2 = \alpha_3 + i\ \alpha_4, & b_2 = \beta_3 + i\ \beta_4, \\
\dots\quad \dots\quad \dots & \dots\quad \dots\quad \dots \\
a_8 = \alpha_{15} + i\ \alpha_{16}, & b_8 = \beta_{15} + i\ \beta_{16},
\end{array}
$$

[1]) v. *Jahrbuch üb. d. Fortschritte der Mathem.* t. 28. p. 174. 1897.

[2]) **Arnoux.** *Essai de psychologie et de métaphysique positives.* Assoc. Franç. 25. v. Jahrb. üb. d. Fortschr. etc. l. c.

[3]) v. *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften.* t. XCVI. H. 1. p. 110.

[4]) v. **Antomari** (*Sur le produit de deux sommes de huit carrés.* Comptes Rendus des Scéances de l' Académ. des Sciences. t. CIV. p. 566.); **Studnička** (*Neue Lehrsätze, Summen von Quadratzahlen betreffend.* Sitzungsber. der k. böhm. Gesellsch. der Wissensch. Jahrg. 1894.) и **Moureaux** (*Sur un corollaire du théorème de Catalan.* Compt. Rend. des Scéances de l'Académ. des Sciences. t. CXVIII. p. 700.).

а

$$x_1 = \alpha_1 - i\,\alpha_2, \qquad y_1 = \beta_1 - i\,\beta_2,$$

$$x_2 = \alpha_3 - i\,\alpha_4, \qquad y_2 = \beta_3 - i\,\beta_4,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$x_8 = \alpha_{15} - i\,\alpha_{16}, \qquad y_8 = \beta_{15} - i\,\beta_{16}.$$

Ти бројеви a и x, b и y су, као што видимо, коњуговано комплексни. Према томе је на првом месту јасно, да ће у сваком од ова два збира:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_8 x_8, \quad b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_8 y_8$$

бити по 16 квадрата тако, да ће израз

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_8 x_8)\,(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_8 y_8)$$

представљати производ два збира од 16 квадрата:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_8 x_8)\,(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_8 y_8)$$

$$= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{16}^2)\,(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_{16}^2).$$

Даље, врло се лако може доказати, да у овај мах изрази овог облика:

$$a_i\, y_i + a_j\, y_j + \cdots \quad \text{и} \quad b_i\, x_i + b_j\, x_j + \cdots$$

морају представљати два коњуговано комплексна броја. Тако ће, примера ради, бити

$$a_1\ y_1 + a_2\ y_2 = (\alpha_1\ \beta_1 + \alpha_2\ \beta_2 + \alpha_3\ \beta_3 + \alpha_4\ \beta_4)$$

$$- i\ (\alpha_1\ \beta_2 - \alpha_2\ \beta_1 + \alpha_3\ \beta_4 - \alpha_4\ \beta_3),$$

а

$$b_1\ x_1 + b_2\ x_2 = (\alpha_1\ \beta_1 + \alpha_2\ \beta_2 + \alpha_3\ \beta_3 + \alpha_4\ \beta_4)$$

$$+ i\ (\alpha_1\ \beta_2 - \alpha_2\ \beta_1 + \alpha_3\ \beta_4 - \alpha_4\ \beta_3).$$

Према томе ће очевидно и изрази

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_8 y_8 \text{ и } b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_8 x_8$$

представљати два коњуговано комплексна броја тако, да ће се производ

$$(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_8 y_8)\ (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_8 x_8)$$

моћи изразити збиром од два квадрата:

$$(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_8 y_8)\ (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_8 x_8)$$

$$= (\alpha_1\ \beta_1 + \alpha_2\ \beta_2 + \cdots + \alpha_{16}\ \beta_{16})^2$$

$$+ (\alpha_1\ \beta_2 - \alpha_2\ \beta_1 + \cdots + \alpha_{15}\ \beta_{16} - \alpha_{16}\ \beta_{15}).^2$$

Напослетку, исто се тако лако може доказати и да ће две детерминанте овога типа:

$$(a_i\ b_j), \quad (x_i\ y_j)$$

такођер представљати два коњуговано комплексна броја. На пример, у развијеном облику свом биће

$$(a_1 \ b_2) = (\alpha_1 \ \beta_3 - \alpha_2 \ \beta_4 - \alpha_3 \ \beta_1 + \alpha_4 \ \beta_2)$$
$$+ \ i \ (\alpha_1 \ \beta_4 + \alpha_2 \ \beta_3 - \alpha_3 \ \beta_2 - \alpha_4 \ \beta_1),$$

док је

$$(x_1 \ y_2) = (\alpha_1 \ \beta_3 - \alpha_2 \ \beta_4 - \alpha_3 \ \beta_1 + \alpha_4 \ \beta_2)$$
$$- \ i \ (\alpha_1 \ \beta_4 + \alpha_2 \ \beta_3 - \alpha_3 \ \beta_2 - \alpha_4 \ \beta_1).$$

Према томе ће опет изрази овог облика:

$$(a_i \ b_j) + (a_l \ b_m) + (x_r \ y_s) + \cdots \quad \cdots$$

и

$$(x_i \ y_j) + (x_l \ y_m) + (a_r \ b_s) + \cdots \quad \cdots$$

бити коњуговано комплексни бројеви, а производи њихови моћи ће се изразити збиром од по два квадрата.

Имајући све то у виду вратићемо се нашој проблеми и помножићемо тога ради ове две проширене детерминанте:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_8 \\ b_1 & b_2 \cdots b_8 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \cdots x_8 \\ y_1 & y_2 \cdots y_8 \end{vmatrix}.$$

Тај производ може се изразити на два начина: или у облику једне детерминанте другога реда, или у облику збира производâ детерминаната другога реда. У првом случају је тај производ изражен овом детерминантом:

$$\begin{vmatrix} a_1 \ x_1 + a_2 \ x_2 + \cdots + a_8 \ x_8 & a_1 \ y_1 + a_2 \ y_2 + \cdots + a_8 \ y_8 \\ b_1 \ x_1 + b_2 \ x_2 + \cdots + b_8 \ x_8 & b_1 \ y_1 + b_2 \ y_2 + \cdots + b_8 \ y_8 \end{vmatrix},$$

а у другом случају биће он изражен збиром од $\binom{8}{2} = 28$ ових производа детерминаната :[1])

$$
\begin{array}{l}
(a_1\ b_2)\ (x_1\ y_2),\ (a_1\ b_3)\ (x_1\ y_3),\ \cdots\ (a_1\ b_8)\ (x_1\ y_8) \\
\qquad\qquad\qquad (a_2\ b_3)\ (x_2\ y_3),\ \cdots\ (a_2\ b_8)\ (x_2\ y_8) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a_7\ b_8)\ (x_7\ y_8).
\end{array}
$$

Ако се сад узме, да је

$$\Sigma\, a_i\, x_i = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_8\, x_8,$$

$$\Sigma\, b_i\, y_i = b_1\, y_1 + b_2\, y_2 + \cdots + b_8\, y_8,$$

$$\Sigma\, a_i\, y_i = a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + \cdots + a_8\, y_8,$$

$$\Sigma\, b_i\, x_i = b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \cdots + b_8\, x_8,$$

а

$$\Sigma\, (ab)\, (xy) =$$

$$
\begin{array}{r}
(a_1\ b_2)\ (x_1\ y_2) + (a_1\ b_3)\ (x_1\ y_3) + \cdots + (a_1\ b_8)\ (x_1\ y_8) \\
+ (a_2\ b_3)\ (x_2\ y_3) + \cdots + (a_2\ b_8)\ (x_2\ y_8) \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
+ (a_7\ b_8)\ (x_7\ y_8),
\end{array}
$$

онда ће очевидно бити

$$\Sigma\, a_i\, x_i\, \Sigma\, b_i\, y_i = \Sigma\, a_i\, y_i\, \Sigma\, b_i\, x_i + \Sigma\, (ab)(xy). \qquad (1)$$

[1]) Види моју *Теорију детерминаната* p. 92.

Производ $\Sigma\, a_i\, x_i\ \Sigma\, b_i\, y_i$ т. ј. производ два збира од по 16 квадрата изражен је дакле збиром ова два израза: $\Sigma\, a_i\, y_i\ \Sigma\, b_i\, x_i$ и $\Sigma\, (ab)(xy)$. Први између та два израза т. ј. производ $\Sigma\, a_i\, y_i\ \Sigma\, b_i\, x$ представља међутим збир од два квадрата. Ако би се дакле могло доказати, да се онај други израз, т. ј. да се збир $\Sigma\, (ab)(xy)$ може изразити збиром од 14 квадрата, онда би тим непосредно била доказана оваква теорема: Кад се некакав збир од шеснаест квадрата помножи неким другим збиром од шеснаест квадрата, онда се производ та два збира може изразити збиром од шеснаест квадрата.

Мени међутим није пошло за руком, да ту општу теорему докажем, јер сам ја, као што ће се одмах видети, доказао, *да се збир* $\Sigma\, (ab)\, (xy)$ *само уз нека мала, али аналитички тачно утврђена ограничења може изразити збиром од четрнаест квадрата*, другим речима доказао сам, *да ће се и производ поменута два збира од 16 квадрата само уз та ограничења моћи изразити збиром од 16 квадрата.*

Све то видеће се најбоље по овоме. Уочићу ових седам производа збирова:

$$A_1 = [(a_1\ b_2) + (a_3\ b_4) + (a_5\ b_6) + (a_7\ b_8)]$$
$$\times\ [(x_1\ y_2) + (x_3\ y_4) + (x_5\ y_6) + (x_7\ y_8)],$$

$$A_2 = [(a_2\ b_3) + (a_1\ b_4) + (a_6\ b_7) + (a_5\ b_8)]$$
$$\times\ [(x_2\ y_3) + (x_1\ y_4) + (x_6\ y_7) + (x_5\ y_8)],$$

$$A_3 = [(a_3\ b_1) + (a_2\ b_4) + (a_5\ b_7) + (a_8\ b_6)]$$
$$\times\ [(x_3\ y_1) + (x_2\ y_4) + (x_5\ y_7) + (x_8\ y_6)],$$

$$A_4 = [(a_2\ b_5) + (a_7\ b_4) + (a_1\ b_6) + (a_8\ b_3)]$$
$$\times\ [(x_2\ y_5) + (x_7\ y_4) + (x_1\ y_6) + (x_8\ y_3)],$$

$$A_5 = [(a_1\ b_5) + (a_3\ b_7) + (a_6\ b_2) + (a_8\ b_4)]$$
$$\times\ [(x_1\ y_5) + (x_3\ y_7) + (x_6\ y_2) + (x_8\ y_4)],$$

$$A_6 = [(a_2\ b_7) + (a_4\ b_5) + (a_3\ b_6) + (a_1\ b_8)]$$
$$\times\ [(x_2\ y_7) + (x_4\ y_5) + (x_3\ y_6) + (x_1\ y_8)],$$

$$A_7 = [(a_7\ b_1) + (a_3\ b_5) + (a_6\ b_4) + (a_2\ b_8)]$$
$$\times\ [(x_7\ y_1) + (x_3\ y_5) + (x_6\ y_4) + (x_2\ y_8)].$$

Сваки између тих производа A збирова моћи ће се, као што знамо, изразити збиром од два квадрата тако, да ће у збиру

$$\Sigma A = A_1 + A_2 + \cdots + A_7 \qquad \text{(A)}$$

бити свега четрнаест квадрата.

Пошто се сад по Лапласовој теореми нека детерминанта $(a_1\ b_2\ c_3\ d_4)$ четвртога реда може на овај начин растворити у збир производа детерминаната другога реда:

$$a_1 b_2 c_3 d_4) = (a_1 b_2)(c_3 d_4) + (a_1 b_3)(c_4 d_2) + (a_1 b_4)(c_2 d_3)$$
$$+ (a_2 b_3)(c_1 d_4) + (a_4 b_2)(c_1 d_3) + (a_3 b_4)(c_1 d_2),$$

то ћемо, упоредивши збир ΣA са збиром $\Sigma (ab)(xy)$, лако увидети да је

$$\begin{aligned}\Sigma A - \Sigma\,(a\,b)\,(x\,y) = {} & (a_1\,b_2\,x_3\,y_4) + (a_1\,b_2\,x_5\,y_6) \\ & + (a_1\,b_2\,x_7\,y_8) + (a_3\,b_4\,x_5\,y_6) + (a_3\,b_4\,x_7\,y_8) \\ & + (a_5\,b_6\,x_7\,y_8) + (a_2\,b_3\,x_6\,y_7) + (a_2\,b_3\,x_5\,y_8) \\ & + (a_1\,b_4\,x_6\,y_7) + (a_1\,b_4\,x_5\,y_8) + (a_3\,b_1\,x_5\,y_7) \\ & + (a_3\,b_1\,x_8\,y_6) + (a_2\,b_4\,x_5\,y_7) + (a_2\,b_4\,x_8\,y_6), \quad (2)\end{aligned}$$

а по томе изразу види се ово: *Ако је свака између детерминаната што се налазе на десној страни израза (2) посебице равна нули:*

$$(a_1\,b_2\,x_3\,y_4) = 0,\ (a_1\,b_2\,x_5\,y_6) = 0, \cdots\cdots (a_2\,b_4\,x_8\,y_6) = 0,$$

онда ће очевидно бити

$$\Sigma A = \Sigma\,(ab)\,(xy).$$

Другим речима, *кад је*

$$(a_1\,b_2\,x_3\,y_4) = 0, (a_1\,b_2\,x_5\,y_6) = 0, \cdots (a_2\,b_4\,x_8\,y_6) = 0, \quad (3)$$

онда ће се збир $\Sigma\,(ab)\,(xy)$ моћи изразити збиром од четрнаест квадрата, па ће се према томе поред тих погодаба и производ горња два збира од шеснаест квадрата моћи изразити збиром од шеснаест квадрата.

Наша проблема је дакле с чисто формалне стране решена, само нам остаје још, да мало дубље загледамо у природу погодаба (3), како бисмо отуд могли и даље закључке извући. Тога ради задржаћемо се најпре на првој између условних детерминаната (2), т. ј. уочићемо детерминанту

$$(a_1\ b_2\ x_3\ y_4) = 0.$$

Пошто је

$$(a_1\ b_2\ x_3\ y_4) = \begin{vmatrix} \alpha_1+i\alpha_2 & \beta_1+i\beta_2 & \alpha_1-i\alpha_2 & \beta_1-i\beta_2 \\ \alpha_3+i\alpha_4 & \beta_3+i\beta_4 & \alpha_3-i\alpha_4 & \beta_3-i\beta_4 \\ \alpha_5+i\alpha_6 & \beta_5+i\beta_6 & \alpha_5-i\alpha_6 & \beta_5-i\beta_6 \\ \alpha_7+i\alpha_8 & \beta_7+i\beta_8 & \alpha_7-i\alpha_8 & \beta_7-i\beta_8 \end{vmatrix},$$

то ћемо, растворивши последњу детерминанту у збирове детерминаната, добити да је

$$(a_1\ b_2\ x_3\ y_4) = 4\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \end{vmatrix},$$

а по томе се види, да ће бити

$(a_1\ b_2\ x_3\ y_4) = 0$, кад је $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \end{vmatrix} = 0.$

Исто тако лако може се доказати и да ће бити:

$$(a_1\ b_2\ x_5\ y_6) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(a_1\ b_2\ x_7\ y_8) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(a_3\ b_4\ x_5\ y_6) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_3\ b_4\ x_7\ y_8) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_5\ b_6\ x_7\ y_8) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(a_2\ b_3\ \ x_6\ y_7) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(a_2\ b_3\ \ x_5\ y_8) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(a_1\ b_4\ \ x_6\ y_7) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(a_1\ b_4\ \ x_5\ y_8) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(a_3\ b_1\ \ x_5\ y_7) = 0, \text{ кад је } \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{vmatrix} = 0;$$

$(a_3\ b_1\ x_8\ y_6) = 0$, кад је $\begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} = 0;$

$(a_2\ b_4\ x_5\ y_7) = 0$, кад је $\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{vmatrix} = 0;$

$(a_2\ b_4\ x_8\ y_6) = 0$, кад је $\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} = 0.$

То би дакле били услови, под којима би се производ два збира од шеснаест квадрата могао изразити збиром од шеснаест квадрата. Ти услови могу, као што се види, бити задовољени на веома много различитих начина. Они ће очевидно бити задовољени у овим случајевима:

1-во, кад је

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \alpha_3 = \alpha_4,\ \alpha_5 = \alpha_6, \cdots \alpha_{13} = \alpha_{14},\ \alpha_{15} = \alpha_{16}; \quad \text{(a)}$$

2-го, кад је

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_3 = \beta_3,\ \alpha_5 = \beta_5, \cdots \alpha_{13} = \beta_{13},\ \alpha_{15} = \beta_{15}; \quad \text{(b)}$$

3-ће, кад је

$$\alpha_1 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_4, \alpha_5 = \beta_6, \cdots\cdots \alpha_{13} = \beta_{14}, \alpha_{15} = \beta_{16}; \quad (c)$$

4-то, кад је

$$\beta_1 = \beta_2, \beta_3 = \beta_4, \beta_5 = \beta_6, \cdots\cdots \beta_{13} = \beta_{14}, \beta_{15} = \beta_{16}; \quad (d)$$

5-то, кад је

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \cdots\cdots = \alpha_{14} = \alpha_{16} = 0; \quad (e)$$

6-то, кад је

$$\beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = \cdots\cdots = \beta_{14} = \beta_{16} = 0 \quad (f)$$

и т. д. и т. д. У свима тим случајевима ће свакад прве три условне детерминанте $(a_1\, b_2\, x_3\, y_4)$, $(a_1\, b_2\, x_5\, y_6)$ и $(a_1\, b_2\, x_7\, y_8)$ бити равне нули, а уз та три услова биће у исти мах задовољени и сви остали услови. Кад на пример постоји услов (e), онда ћемо у првобитном збиру

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \cdots + \alpha_{15}^2 + \alpha_{16}^2$$

од шеснаест квадрата имати свега осам квадрата, па ћемо према свему ономе о чему мало час говорисмо, моћи формулирати овакву једну генералну теорему:

Теорема I. *Кад се некакав збир од осам квадрата помножи другим једним збиром од шеснаест квадрата, онда се производ та два збира може изразити једним збиром од шеснаест квадрата.*

Том теоремом је очевидно обухваћена Бриоскијева, а уз ову, разуме се, и Ајлерова теорема. У осталом Бриоскијева теорема може се уз услове (e) и (f) добити непосредно и из горњег, првобитног основног обрасца (1). По томе обрасцу је на име у опште

$$\Sigma\, a_i x_i\ \Sigma\, b_i y_i = \Sigma\, a_i y_i\ \Sigma\, b_i x_i + \Sigma\, (ab)\ (xy),$$

или

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{16}^2)\ (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_{16}^2)$$
$$= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_{16} \beta_{16})^2$$
$$+ (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 + \cdots + \alpha_{15} \beta_{16} - \alpha_{16} \beta_{15})^2$$
$$+ \Sigma\, (ab)\ (xy)\,; \tag{4}$$

у овај мах је међутим с једне стране

$$\Sigma\, (ab)\ (xy) = \Sigma\, A,$$

а с друге стране

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \cdots = \alpha_{16} = 0,$$

$$\beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = \cdots = \beta_{16} = 0,$$

па је према томе и по обрасцу (4)

$$(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_{15}^2)\ (\beta_1^2 + \beta_3^2 + \cdots + \beta_{15}^2)$$
$$= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_5 \beta_5 + \alpha_7 \beta_7 + \alpha_9 \beta_9 + \alpha_{11} \beta_{11}$$
$$+ \alpha_{13} \beta_{13} + \alpha_{15} \beta_{15})^2$$
$$+ (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 + \alpha_7 \beta_5 - \alpha_5 \beta_7 + \alpha_{11} \beta_9 - \alpha_9 \beta_{11}$$
$$+ \alpha_{15} \beta_{13} - \alpha_{13} \beta_{15})^2$$

$$+\,(\alpha_7\beta_1+\alpha_5\beta_3-\alpha_3\beta_5-\alpha_1\beta_7+\alpha_{15}\beta_9+\alpha_{13}\beta_{11}$$
$$-\,\alpha_{11}\beta_{13}-\alpha_9\beta_{15})^2$$

$$+\,(\alpha_5\beta_1-\alpha_7\beta_3-\alpha_1\beta_5+\alpha_3\beta_7-\alpha_{13}\beta_9+\alpha_{15}\beta_{11}$$
$$+\,\alpha_9\beta_{13}-\alpha_{11}\beta_{15})^2$$

$$+\,(\alpha_{11}\beta_1+\alpha_9\beta_3-\alpha_{15}\beta_5-\alpha_{13}\beta_7-\alpha_3\beta_9-\alpha_1\beta_{11}$$
$$+\,\alpha_7\beta_{13}+\alpha_5\beta_{15})^2$$

$$+\,(\alpha_9\beta_1-\alpha_{11}\beta_3+\alpha_{13}\beta_5-\alpha_{15}\beta_7-\alpha_1\beta_9+\alpha_3\beta_{11}$$
$$-\,\alpha_5\beta_{13}+\alpha_7\beta_{15})^2$$

$$+\,(\alpha_{15}\beta_1+\alpha_{13}\beta_3+\alpha_{11}\beta_5+\alpha_9\beta_7-\alpha_7\beta_9-\alpha_5\beta_{11}$$
$$-\,\alpha_3\beta_{13}-\alpha_1\beta_{15})^2$$

$$+\,(\alpha_{13}\beta_1-\alpha_{15}\beta_3-\alpha_9\beta_5+\alpha_{11}\beta_7+\alpha_5\beta_9-\alpha_7\beta_{11}$$
$$-\,\alpha_1\beta_{13}+\alpha_3\beta_{15})^2,$$

а то није ништа друго, но један нов аналитички израз Бриоскијеве теореме, који се у многоме слаже са оним изразом, који је Пухта у поменутом раду своме изнео.[1])

Тим би у главноме био потпуно довршен наш рад. Остаје нам само још, да поред збира (A) производâ коњуговано комплексних количина уочимо сличне, али типски различите производе збирова, па да с њима упоредимо збир $\Sigma\,(ab)\,(xy)$ исто онако,

[1]) v. **Puchta.** *Uber einen Satz von Euler-Brioschi-Genocchi.* Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissenschaften, t. XCVI. св. 1. 1887. p. 117.

као што смо и мало час тај збир упоређивали са збиром ΣA.

Свега ће, као што је лако увидети, бити још два таква типска збира. Један тип добићемо овако. Узећемо да је

$$B_1 = [(a_1\ b_2) + (a_3\ b_4) + (a_5\ b_6) + (x_7\ y_8)]$$
$$\times [(x_1\ y_2) + (x_3\ y_4) + (x_5\ y_6) + (a_7\ b_8)],$$

$$B_2 = [(a_2\ b_3) + (a_1\ b_4) + (a_6\ b_7) + (x_5\ y_8)]$$
$$\times [(x_2\ y_3) + (x_1\ y_4) + (x_6\ y_7) + (a_5\ b_8)],$$

$$B_3 = [(a_3\ b_1) + (a_2\ b_4) + (a_5\ b_7) + (x_8\ y_6)]$$
$$\times [(x_3\ y_1) + (x_2\ y_4) + (x_5\ y_7) + (a_8\ b_6)],$$

$$B_4 = [(a_2\ b_5) + (a_7\ b_4) + (a_1\ b_6) + (x_8\ y_3)]$$
$$\times [(x_2\ y_5) + (x_7\ y_4) + (x_1\ y_6) + (a_8\ b_3)],$$

$$B_5 = [(a_1\ b_5) + (a_3\ b_7) + (a_6\ b_2) + (x_8\ y_4)]$$
$$\times [(x_1\ y_5) + (x_3\ y_7) + (x_6\ y_2) + (a_8\ b_4)],$$

$$B_6 = [(a_2\ b_7) + (a_4\ b_5) + (a_3\ b_6) + (x_1\ y_8)]$$
$$\times [(x_2\ y_7) + (x_4\ y_5) + (x_3\ y_6) + (a_1\ b_8)],$$

$$B_7 = [(a_7\ b_1) + (a_3\ b_5) + (a_6\ b_4) + (x_2\ y_8)]$$
$$\times [(x_7\ y_1) + (x_3\ y_5) + (x_6\ y_4) + (a_2\ b_8)].$$

Збир

$$\Sigma B = B_1 + B_2 + \cdots + B_7 \tag{B}$$

је очевидно збир од четрнаест квадрата и то ће бити један од она два типска збира, с којима ћемо имати да упоређујемо збир Σ (ab) (xy).

Други типски збир добићемо овако. Уочићемо ове производе збирова:

$$C_1 = [(a_1\ b_2) + (a_3\ b_4) + (x_5\ y_6) + (x_7\ y_8)]$$
$$\times [(x_1\ y_2) + (x_3\ y_4) + (a_5\ b_6) + (a_7\ b_8)],$$

$$C_2 = [(a_2\ b_3) + (a_1\ b_4) + (x_6\ y_7) + (x_5\ y_8)]$$
$$\times [(x_2\ y_3) + (x_1\ y_4) + (a_6\ b_7) + (a_5\ b_8)],$$

$$C_3 = [(a_3\ b_1) + (a_2\ b_4) + (x_5\ y_7) + (x_8\ y_6)]$$
$$\times [(x_3\ y_1) + (x_2\ y_4) + (a_5\ b_7) + (a_8\ b_6)],$$

$$C_4 = [(a_2\ b_5) + (a_7\ b_4) + (x_1\ y_6) + (x_8\ y_3)]$$
$$\times [(x_2\ y_5) + (x_7\ y_4) + (a_1\ b_6) + (a_8\ b_3)],$$

$$C_5 = [(a_1\ b_5) + (a_3\ b_7) + (x_6\ y_2) + (x_8\ y_4)]$$
$$\times [(x_1\ y_5) + (x_3\ y_7) + (a_6\ b_2) + (a_8\ b_4)],$$

$$C_6 = [(a_2\ b_7) + (a_4\ b_5) + (x_3\ y_6) + (x_1\ y_8)]$$
$$\times [(x_2\ y_7) + (x_4\ y_5) + (a_3\ b_6) + (a_1\ b_8)],$$

$$C_7 = [(a_7\ b_1) + (a_3\ b_5) + (x_6\ y_4) + (x_2\ y_8)]$$
$$\times [(x_7\ y_1) + (x_3\ y_5) + (a_6\ b_4) + (a_2\ b_8)]:$$

Сабравши те производе збирова, добићемо овај збир од четрнаест квадрата:

$$\Sigma C = C_1 + C_2 + \cdots + C_7, \tag{C}$$

а то ће бити онај други типски збир с којим ћемо упоређивати збир $\Sigma (ab)(xy)$.

Најпре ћемо се задржати на збиру ΣB и упоредићемо тај збир са збиром $\Sigma (ab)(xy)$. Но пре тога поменућемо ово. Пошто је

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_7 & a_8 \\ b_1 & b_2 & b_7 & b_8 \\ a_1 & a_2 & a_7 & a_8 \\ b_1 & b_2 & b_7 & b_8 \end{vmatrix} = 0,$$

то ће очевидно бити и

$$(a_1 b_2)(a_7 b_8) + (a_2 b_7)(a_1 b_8) + (a_7 b_1)(a_2 b_8) = 0.$$

Из сличних разлога биће и

$$(x_1 y_2)(x_7 y_8) + (x_2 y_7)(x_1 y_8) + (x_7 y_1)(x_2 y_8) = 0,$$

$$(a_3 b_4)(a_7 b_8) + (a_4 b_7)(a_3 b_8) + (a_7 b_3)(a_4 b_8) = 0,$$

$$(x_3 y_4)(x_7 y_8) + (x_4 y_7)(x_3 y_8) + (x_7 y_3)(x_4 y_8) = 0,$$

$$\ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots$$

Стога ћемо разлику између ΣB и $\Sigma (ab)(xy)$ моћи овако изразити:

$$\begin{aligned} \Sigma B - \Sigma (ab)(xy) = {} & (a_1 b_2\ x_3 y_4) + (a_1 b_2\ x_5 y_6) \\ & + (a_3 b_4\ x_5 y_6) + (a_2 b_3\ x_6 y_7) + (a_1 b_4\ x_6 y_7) \\ & + (a_3 b_1\ x_5 y_7) + (a_2 b_4\ x_5 y_7). \end{aligned}$$

Према томе ће нам јасно бити ово: *ако је свака између последњих седам детерминаната четвртога реда посебице равна нули:*

$$(a_1\, b_2\;\; x_3\, y_4) = 0,\;\; (a_1\, b_2\;\; x_5\, y_6) = 0,\;\; (a_3\, b_4\;\; x_5\, y_6) = 0,$$

$$(a_2\, b_3\;\; x_6\, y_7) = 0,\;\; (a_1\, b_4\;\; x_6\, y_7) = 0,\;\; (a_3\, b_1\;\; x_5\, y_7) = 0,$$

$$(a_2\, b_4\;\; x_5\, y_7) = 0,$$

онда мора бити

$$\Sigma\; B = \Sigma\,(ab)\;(xy).$$

Под тим условима моћи ће се дакле збир $\Sigma\,(ab)\,(xy)$ изразити збиром од четрнаест квадрата, т. ј. под тим условима моћи ће се производ два збира од шеснаест квадрата изразити збиром од шеснаест квадрата. Другим речима, *кад је*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{vmatrix} = 0,$$

онда ће се свакад производ

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{16}^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_{16}^2)$$

моћи изразити збиром од шеснаест квадрата.

Ти услови моћи ће очевидно, као и они пређашњи, бити задовољени на веома много начина. Они ће, примера ради бити задовољени:

1-во, кад је

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_3 = \beta_3,\ \alpha_5 = \beta_5,\ \cdots\ \cdots\ \alpha_{13} = \beta_{13};$$

2-го, кад је

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \cdots\ \cdots = \alpha_{14} = 0;$$

3-ће, кад је

$$\beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = \cdots\ \cdots\ \beta_{14} = 0$$

и т. д. и т. д.

Узмимо сад да је

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \cdots = \alpha_{14} = 0.$$

Тада ћемо у збиру

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{16}^2 \tag{5}$$

имати само девет квадрата. У оном другом збиру, т. ј. у збиру

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_{16}^2 \tag{6}$$

не ће се у том случају број квадрата ничим окрњити, па како се производ та два збира може изразити збиром од шеснаест квадрата, то смо тим доказали ову теорему:

Теорема II. *Кад се некакав збир од девет квадрата помножи другим једним збиром од шеснаест квадрата, онда се производ та два збира може изразити збиром од шеснаест квадрата.*

Но има још нешто, што нарочито треба истаћи. Ако се на име узме, да је не само

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \cdots = \alpha_{14} = 0,$$

већ у исти мах и

$$\beta_2 = \beta_4 = \cdots = \beta_{14} = 0,$$

онда ће и у збиру (5), и у збиру (6) бити свега девет квадрата. По обрасцу (4) биће дакле у овај мах

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_{13}^2 + \alpha_{15}^2 + \alpha_{16}^2) \\
&\times (\beta_1^2 + \beta_3^2 + \cdots + \beta_{13}^2 + \beta_{15}^2 + \beta_{16}^2) \\
&= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_5\beta_5 + \alpha_7\beta_7 + \alpha_9\beta_9 + \alpha_{11}\beta_{11} \\
&\qquad + \alpha_{13}\beta_{13} + \alpha_{15}\beta_{15} + \alpha_{16}\beta_{16})^2 \\
&+ (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7 + \alpha_{11}\beta_9 - \alpha_9\beta_{11} \\
&\qquad + \alpha_{15}\beta_{13} - \alpha_{13}\beta_{15})^2 \\
&+ (\alpha_7\beta_1 + \alpha_5\beta_3 - \alpha_3\beta_5 - \alpha_1\beta_7 + \alpha_{15}\beta_9 + \alpha_{13}\beta_{11} \\
&\qquad - \alpha_{11}\beta_{13} - \alpha_9\beta_{15})^2 \\
&+ (\alpha_5\beta_1 - \alpha_7\beta_3 - \alpha_1\beta_5 + \alpha_3\beta_7 - \alpha_{13}\beta_9 + \alpha_{15}\beta_{11} \\
&\qquad + \alpha_9\beta_{13} - \alpha_{11}\beta_{15})^2
\end{aligned}$$

$$+ (\alpha_{11}\beta_1 + \alpha_9\beta_3 - \alpha_{15}\beta_5 - \alpha_{13}\beta_7 - \alpha_3\beta_9 - \alpha_1\beta_{11} + \alpha_7\beta_{13} + \alpha_5\beta_{15})^2$$

$$+ (\alpha_9\beta_1 - \alpha_{11}\beta_3 + \alpha_{13}\beta_5 - \alpha_{15}\beta_7 - \alpha_1\beta_9 + \alpha_3\beta_{11} - \alpha_5\beta_{13} + \alpha_7\beta_{15})^2$$

$$+ (\alpha_{13}\beta_1 + \alpha_{15}\beta_3 + \alpha_{11}\beta_5 + \alpha_9\beta_7 - \alpha_7\beta_9 - \alpha_5\beta_{11} - \alpha_3\beta_{13} - \alpha_1\beta_{15})^2$$

$$+ (\alpha_{13}\beta_1 - \alpha_{15}\beta_3 - \alpha_9\beta_5 + \alpha_{11}\beta_7 + \alpha_5\beta_9 - \alpha_7\beta_{11} - \alpha_1\beta_{13} + \alpha_3\beta_{15})^2$$

$$+ (\alpha_1\beta_{16} - \alpha_{16}\beta_1)^2 + (\alpha_3\beta_{16} - \alpha_{16}\beta_3)^2$$

$$+ (\alpha_5\beta_{16} - \alpha_{16}\beta_5)^2 + (\alpha_7\beta_{16} - \alpha_{16}\beta_7)^2$$

$$+ (\alpha_9\beta_{16} - \alpha_{16}\beta_9)^2 + (\alpha_{11}\beta_{16} - \alpha_{16}\beta_{11})^2$$

$$+ (\alpha_{13}\beta_{16} - \alpha_{16}\beta_{13})^2 + (\alpha_{15}\beta_{16} - \alpha_{16}\beta_{15})^2. \qquad (7)$$

Према томе смо добили овакву теорему:

Теорема III. *Производ два збира од девет квадрата може се изразити једним збиром од шеснаест квадрата.*

Последица последње две теореме биће ова теорема;

Теорема IV. *Кад се међу собом множе збирови од девет квадрата, онда се производ таквих збирова може изразити збиром од шеснаест квадрата.*

Ваља поменути још то, *да је обрасцем (7) генерализиран и познати, знаменити Лагранжев образац за множење два збира од три квадрата.*

Остаје нам још да видимо до којих резултата ћемо доћи уз типски збир ΣC. Ако тај збир упоредимо са збиром $\Sigma (ab)\ (xy)$, видећемо да се разлика та два збира може овако изразити:

$$\Sigma C - \Sigma (ab)\ (xy) =$$

$$[(a_3\, b_1) + (a_2\, b_4) - (x_3\, y_1) - (x_2\, y_4)]\ [(a_5\, b_7) + (a_8\, b_6)$$

$$- (x_5\, y_7) - (x_8\, y_6)]$$

$$+ (a_1\, b_2\ x_3\, y_4) + (a_5\, b_6\ x_7\, y_8) + (a_3\, b_1\ x_5\, y_7)$$

$$+ (a_3\, b_1\ x_8\, y_6) + (a_5\, b_7\ x_2\, y_4) + (a_2\, b_4\ x_8\, y_6),$$

а отуда излази ово· *ако је*

$$(a_1\, b_2\ x_3\, y_4) = 0,\ (a_5\, b_6\ x_7\, y_8) = 0,\ (a_3\, b_1\ x_5\, y_7) = 0,$$

$$(a_3\, b_1\ x_8\, y_6) = 0,\ (a_5\, b_7\ x_2\, y_4) = 0,\ (a_2\, b_4\ x_8\, y_6) = 0,$$

и áко је било посебице, било у исти мах

$$(a_3\, b_1) + (a_2\, b_4) - (x_3\, y_1) - (x_2\, y_4) = 0,$$

$$(a_5\, b_7) + (a_8\, b_6) - (x_5\, y_7) - (x_8\, y_6) = 0,$$

онда ће бити

$$\Sigma C = \Sigma (ab)\ (xy),$$

т. ј. онда ће се производ $\Sigma\, a_i\, x_i\ \Sigma\, b_i\, y_i$ *моћи изразити збиром од шеснаест квадрата.* Пошто је међутим

$$(a_3\, b_1) - (x_3\, y_1) = 2i\ [(\alpha_6\quad \beta_1) + (\alpha_5\quad \beta_2)],$$

$$(a_2\, b_4) - (x_2\, y_4) = 2i\ [(\alpha_4\quad \beta_7) + (\alpha_3\quad \beta_8)],$$

$$(a_5\, b_7) - (x_5\, y_7) = 2i\, [(\alpha_{10}\, \beta_{13}) + (\alpha_9\, \beta_{14})]$$

$$(a_8\, b_6) - (x_8\, y_6) = 2i\, [(\alpha_{16}\, \beta_{11}) + (\alpha_{15}\, \beta_{12})],$$

то можемо тврдити и ово: *збир* $\Sigma\, C$ *биће једнак са збиром* $\Sigma\, (ab)\, (xy)$, *ако је*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 & \beta_5 & \beta_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_9 & \alpha_{10} & \beta_9 & \beta_{10} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \beta_7 & \beta_8 \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

и ако је осим тога још било посебице, било у исти мах

$$\alpha_6\beta_1 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_5\beta_2 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 \\ + \alpha_3\beta_8 - \alpha_8\beta_3 = 0,$$

$$\alpha_{10}\beta_{13} - \alpha_{13}\beta_{10} + \alpha_9\beta_{14} - \alpha_{14}\beta_9 + \alpha_{16}\beta_{11} \\ - \alpha_{11}\beta_{16} + \alpha_{15}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{15} = 0.$$

По тим изразима види се, да има много случајева, у којима ће бити

$$\Sigma C = \Sigma (ab)\ (xy),$$

па према томе и

$$\Sigma a_i x_i\ \Sigma b_i y_i = \Sigma a_i y_i\ \Sigma b_i x_i + \Sigma C. \tag{8}$$

Сваком таквом посебном случају одговараће некакав посебни израз производа

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{16}^2)\ (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_{16}^2).$$

На пример, ако узмемо да је

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \cdots = \alpha_{16} = 0,$$

$$\beta_{10} = \beta_{12} = \beta_{14} = \beta_{16} = 0,$$

онда ћемо у збиру

$$\alpha_1^2 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{16}^2$$

имати свега осам, а у збиру

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_{16}^2$$

свега дванаест квадрата, и у том случају моћи ћемо по обрасцу (8) изразити производ та два збира збиром од шеснаест квадрата.

Да завршимо. Кад се уоче сви резултати, и они који су досад били познати, и они које сам ја изнео, онда се сме тврдити, да је врло вероватно, да ће Ђенокијева теорема постојати у опште и кад је $n = 4$.