О БЕРНУЉИЈЕВИМ И АЈЛЕРОВИМ БРОЈЕВИМА.

НАПИСАО

Д-р Богдан Гавриловић.

Познато је да се функција

$$\frac{z}{e^z - 1}$$

може развити у овај бесконачан ред:

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n} z^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} .$$

Количине B, што се у томе реду јављају, зову се по Моавру и Ајлеру Бернуљијевим бројевима. Вредности њихове су ово:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_8 = \frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad \cdots \quad \cdots$$

Исто тако се зна, да функцију $\sec z$ представља овај бесконачан ред:

$$\sec z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{2n}\, z^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} \cdot$$

У томе реду означени су са E ови бројеви:

$$E_2 = 1,\ E_4 = 5,\ E_6 = 61,\ E_8 = 1385,$$
$$E_{10} = 50521, \cdots \cdots$$

Ти бројеви зову се по Шерку Ајлеровим бројевима.

И Бернуљијеви и Ајлерови бројеви јављају се често у Анализи, а нарочито у Теорији бесконачних редова. Особине тих бројева испитивали су врло многи математичари почев од Ајлера и Моавра, па све до наших дана. Тако је баш пре неколико месеци г. Ф. Ј. Студничка у Веснику Ческог Ученог Друштва штампао једну своју расправу[1]) и у тој расправи изнео је између осталога и то, како стоје према Ајлеровим бројевима неки бројеви, који важну улогу играју у теорији Бернуљијевих бројева.[2]) Те бројеве зову Енглези „prepared Bernoullians", а г. Студничка их је бележио са $A_1, A_3, A_5, \cdots A_{2n-1}$. Вредности њихове су ово:

$$A_1 = 1,\ A_3 = 2,\ A_5 = 16,\ A_7 = 272,\ A_9 = 7936, \cdots$$

Ти бројеви јављају се у бесконачном реду, што представља функцију $tg\, z$. Зна се на име да је

$$tg\, z = 2^2\,(2^2 - 1)\, B_2 \frac{z}{2\,!} + 2^4\,(2^4 - 1)\, B_4 \frac{z^3}{4\,!} +$$
$$+ 2^6\,(2^6 - 1)\, B_6 \frac{z^5}{6!} + \cdots \cdots,$$

[1]) **Dr. F. J. Studnička.** *Über ein Analogon der Euler'schen Zahlen,* Sitzungsberichte der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften 1900.

[2]) *v.* **Saalschütz.** *Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen,* 1893. и **Edwards.** *Treatise on the Differential Calculus,* 1896. p. 499.

па како је

$$A_1 = \frac{2^2(2^2-1)}{2} B_2,$$

$$A_3 = \frac{2^4(2^4-1)}{4} B_4,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$A_{2n-1} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

то ће бити и

$$tg\, z = \frac{A_1}{1!} z + \frac{A_3}{3!} z^3 + \frac{A_5}{5!} z^5 + \cdots \cdots$$

Г. Студничка је доказао сад, да се Ајлерови бројеви могу изразити бројевима A и нашао је, да је

$$E_{2n} = \frac{1}{3^{n|2}} \begin{vmatrix} A_3+1 & -3_2 & 0 & \cdots & 0 \\ A_5-1 & 5_2 & -5_4 & \cdots & 0 \\ A_7+1 & -7_2 & 7_4 & \cdots & 0 \\ A_9-1 & 9_2 & -9_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{2n+1}\pm 1 & \mp(2n+1)_2 & \pm(2n+1)_4 & \cdots & (2n+1)_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Поменућу још то, да је у томе обрасцу симболом $3^{n|2}$ означен овај Крампов и Арбогастов факултет:[1])

$$3^{n|2} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1).$$

И ја сам био покушао да нађем везу између бројева E и A и то ми је, као што ће се видети,

[1]) Laurent. *Cours d' Analyse*, 1888. t. III. p. 464.

пошло за руком. Само сам ја ради што веће симетрије бројеве A заменио у обрасцима, које сам добио, неким бројевима S, који са бројевима A стоје у овој простој вези:

$$S_{2n-1} = (-1)^n A_{2n-1}.$$

Према томе ће функцију $tg\, z$ представљати овај бесконачан ред:

$$tg\, z = -\frac{S_1}{1!} z + \frac{S_3}{3!} z^3 - \frac{S_5}{5!} z^5 + \cdots$$

Међутим зна се ово[1]): Ако је

$$f(z) = a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + \cdots,$$

а

$$g(z) = b_0 + b_1 (z-a) + b_2 (z-a)^2 + \cdots,$$

и ако је мероморфна функција $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ представљена овим бесконачним редом:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = u_0 + u_1 (z-a) + u_2 (z-a)^2 + \cdots,$$

онда коефицијенат u_n има ову вредност:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

[1]) Види моју расправу, штампану у LXI. Гласу под натписом *О аналитичким изразима неких функција,* стр. 65.

То правило применићемо одмах и претпоставићемо тога ради да је

$$f(z) = -\frac{S_1}{1!} + \frac{S_3}{3!} z^2 - \frac{S_5}{5!} z^4 + \cdots,$$

а

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots.$$

Како је

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{tg\, z}{sin\, z},$$

то ће према поменутом правилу бити

$$\frac{tg\, z}{sin\, z} = -\frac{S_1}{1!} - \begin{vmatrix} -\frac{S_1}{1!} & \frac{S_3}{3!} \\ 1 & -\frac{1}{3!} \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} -\frac{S_1}{1!} & \frac{S_3}{3!} & -\frac{S_5}{5!} \\ 1 & -\frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3!} \end{vmatrix} z^2$$

$$- \begin{vmatrix} -\frac{S_1}{1!} & \frac{S_3}{3!} & -\frac{S_5}{5!} & \frac{S_7}{7!} \\ 1 & -\frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & -\frac{1}{7!} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3!} \end{vmatrix} z^3 + \cdots$$

Променимо сад знаке свима елементима парних дијагонала у матрицама детерминаната, што се јављају у последњем бесконачном реду. Тада никако не ће променити своју вредност детерминанте парнога степена, а детерминанте непарног степена промениће при томе само свој знак, али вредност не. С тога ће се у развијеном облику функције $\frac{tg\,z}{sin\,z}$ уз z^n јављати овај коефицијенат:

$$-\begin{vmatrix} \frac{S_1}{1!} & \frac{S_3}{3!} & \frac{S_5}{5!} & \cdots & \frac{S_{2n+1}}{(2n+1)!} \\ 1 & \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \cdots & \frac{1}{(2n+1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(2n-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Но како је функција $\frac{tg\,z}{sin\,z}$ парна, то *ће детерминанта (1) морати бити равна нули кад је са n означен некакав непаран број $2k+1$*, а то значи да је

$$\begin{vmatrix} \frac{S_1}{1!} & \frac{S_3}{3!} & \frac{S_5}{5!} & \cdots & \frac{S_{4k+3}}{(4k+3)!} \\ 1 & \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \cdots & \frac{1}{(4k+3)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(4k+1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(4k-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix} = 0.$$

С друге стране је опет

$$\frac{tg\, z}{\sin z} = \sec z,$$

па како је

$$\sec z = 1 + \frac{E_2}{2\,!} z^2 + \frac{E_4}{4\,!} z^4 + \frac{E_6}{6\,!} z^6 + \cdots,$$

то ће очевидно све детерминанте, што се јављају у развијеном облику функције $\frac{tg\, z}{\sin z}$ *уз парне степене промењиве* z *морати одређивати Ајлерове бројеве тако, да је*

$$\frac{E_{2k}}{(2k)\,!} = - \begin{vmatrix} \frac{S_1}{1!} & \frac{S_3}{3!} & \frac{S_5}{5!} & \cdots & \frac{S_{4k+1}}{(4k+1)!} \\ 1 & \frac{1}{3!} & \frac{1}{5!} & \cdots & \frac{1}{(4k+1)\,!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(4k-1)\,!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(4k-3)\,!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix} .$$

Та правила добили смо уједначујући у два бесконачна реда коефицијенте, што се јављају уз исте степене промењиве. То исто начело могли бисмо примењивати и даље. Уочимо тога ради функцију

$$\frac{e^z - 1}{z} .$$

Та функција може се изразити овим бесконачним редом:

$$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2\,!} + \frac{z^2}{3\,!} + \frac{z^3}{4\,!} + \cdots \tag{2}$$

Но кад је функција $f(z)$ представљена овим бесконачним редом:

$$f(z) = b_0 + b_1 (z - a) + b_2 (z - a)^2 + \cdots,$$

онда ће коефицијенат u_n, што се јавља уз $(z - a)^n$ у развијеном облику

$$u_0 + u_1 (z - a) + u_2 (z - a)^2 + \cdots$$

функције $\frac{1}{f(z)}$, бити ово:

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-4} & b_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Ако се дакле узме да је

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z},$$

онда ће коефицијенат u_n, што се јавља уз z^n у реду који представља функцију

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z}{e^z - 1},$$

имати ову вредност:

$$u_n = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

То значи да је

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2!} z + \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} z^2 - \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} z^3$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} z^4 - \cdots \tag{3}$$

С друге стране је опет

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{B_2}{2!} z^2 - \frac{B_4}{4!} z^4 + \cdots \tag{4}$$

Ако се дакле изједначе коефицијенти, што се у последњем реду јављају уз поједине степене променљиве z, са коефицијентима што се јављају уз исте степене променљиве z у реду (3), добиће се овај познат *Glaisher-ов образац*[1]):

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n+1)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-1)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

Како су међутим сви чланови реда (4), сем другог члана његова, парнога степена, то је јасно да ће сви коефицијенти што се у реду (3) јављају уз непарне степене променљиве z, сем оног што се јавља уз први степен те променљиве, морати бити равни нули. Према томе је

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(2n)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(2n-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 0.$$

[1]) *v.* **Pascal-Schepp.** *Repertorium der höh. Mathematik, 1900. p. 472.*

Нека је сад

$$\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1},$$

а

$$a_{2k} = (-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!},$$

т. ј. нека је

$$\varphi(z) = 1 - \frac{1}{2}z + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$$

Тада ће се у реду што представља функцију

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{e^z - 1}{z}$$

уз z^{2n} јављати овај коефицијенат:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & a_2 & 0 & a_4 & 0 & \dots & a_{2n-2} & 0 & a_{2n} \\ 1 & -\frac{1}{2} & a_2 & 0 & a_4 & \dots & 0 & a_{2n-2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & a_2 & 0 & \dots & a_{2n-4} & 0 & a_{2n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & a_2 & \dots & 0 & a_{2n-4} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Ту исту функцију представља међутим и ред (2), а у томе реду се уз z^{2n} јавља коефицијенат $1/(2n+1)!$. Ако дакле променимо у детерминанти (5) знаке свима елементима парних дијагонала, онда ћемо добити ово:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & a_2 & 0 & a_4 & 0 & \dots & a_{2n-2} & 0 & a_{2n} \\ 1 & \frac{1}{2} & a_2 & 0 & a_4 & \cdots & 0 & a_{2n-2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & a_2 & 0 & \dots & a_{2n-4} & 0 & a_{2n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & a_2 & \cdots & 0 & a_{2n-4} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Београд
20. априла 1900. год.