O REDOVIMA

JEDNOGRANIH FUNKCIJA.

NAPISAO

D^R. BOGDAN GAVRILOVIĆ.

(Preštampano iz 143. knjige „Rada“ jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti.)

U ZAGREBU

TISAK DIONIČKE TISKARE

1900.

Neka su funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ jednograne u polju S ograničenom nekom konturom C. U tom polju S uzeću ma gdje jednu tačku a i pretpostaviću da je ta tačka a ili obična tačka, ili pol, ili izolovana esencijalna tačka funkcija $\varphi(z)$ i $\psi(z)$. Tačka a može n. pr. po tome biti obična tačka funkcije $\varphi(z)$, a esencijalna tačka funkcije $\psi(z)$, ili pol funkcije $\varphi(z)$, a esencijalna tačka funkcije $\psi(z)$, ili esencijalna tačka obiju funkcija i t. d.

Red funkcije $\varphi(z)\,\psi(z)$ biće u sva tri slučaja cio broj.[1] Taj broj određen je ovim integralom:

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{[\varphi(z)\,\psi(z)]'}{\varphi(z)\,\psi(z)}\,dz.$$

Taj integral se proteže na periferiju nekog beskonačno malog kruga, čije je središte tačka a. Jasno je da se taj integral može rastvoriti u zbir ovih dvaju integrala:

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,dz.$$

To znači da je red proizvoda ma kakvih dviju jednogranih funkcija predstavljen zbirom redova tih

[1] *Weierstrass.* Zur Theorie der eindeutigen analyt. Functionen, Werke t. II. p. 77 i moju raspravu štampanu u 139 knjizi Rada jugoslav. akademije pod natpisom „O ostacima jednogranih funkcija", p. 29.

*

funkcija.[1] Po toj teoremi vidi se neposredno da funkcije $\varphi(z)$ i $\varphi(z)\psi(z)$ imaju isti red u tački a, ako je u toj tački red funkcije $\psi(z)$ nul'a. Kad se dakle traži red neke funkcije u nekoj tački, onda često nije potrebno tražiti ostatak logaritamskog izvoda te funkcije, već ostatke logaritamskih izvoda mnogo prostijih funkcija.

Neka je na primjer

$$f(z) = \frac{z e^{\frac{1}{z}}}{1+z}.$$

Tačka $z = o$ je esencijalna tačka te funkcije, a red njezin je predstavljen brojem 1 u tački $z = o$, jer je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -1 + z - z^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

To se vrlo lako može potvrditi, kad se ima u vidu malo čas pomenuto pravilo. Funkciji

$$\frac{1}{1+z}$$

očevidno tačka $z = o$ niti je nula, niti kakav singularitet. Red te funkcije je dakle u toj tački tačno $= o$. O toj funkciji prema tome u ovaj mah ne ćemo voditi računa. To znači da će red funkcije $f(z)$ biti isti onakav, kakav je i red funkcije $ze^{\frac{1}{z}}$, a red te funkcije je predstavljen brojem 1, jer je u toj tački red funkcije $\varphi(z) = z$ očevidno $= 1$, a red funkcije $\psi(z) = e^{\frac{1}{z}}$ je očevidno $= o$, pošto je

$$\frac{\left(e^{\frac{1}{z}}\right)'}{e^{\frac{1}{z}}} = -\frac{1}{z^2}.$$

[1] Kad bi funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ bile meromorfne u polju S, onda je to pravilo samo sobom jasno. V. *Hoüel.* Calcul infinitésimal, t. III. p. 296.

Neka je sad

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Tada je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{\psi'(z)}{\psi(z)},$$

pa je s toga i

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,dz,$$

t. j. red količnika ma kakvih dviju jednogranih funkcija predstavljen je razlikom redova tih funkcija.

Ta teorema može se primijeniti i na tačku u beskonačnosti. Kad bi na ime tačka $z = \infty$ bila ili obična tačka, ili pol, ili esencijalna tačka funkcijâ $\varphi(z)$ i $\psi(z)$, onda bismo njen red dobili ovako. Zamijenićemo z sa $\frac{1}{\zeta}$ i uzećemo da je

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = F(z), \qquad \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \Phi(z).$$

Tada će red funkcije $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ u tačci $z = \infty$ biti predstavljen ovom razlikom integrala:

$$\frac{1}{2\pi i}\int - \frac{1}{\zeta^2} F\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int - \frac{1}{\zeta^2} \Phi\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta,$$

a to će reći ovom razlikom integrala:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{\zeta^2} \Phi\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{\zeta^2} F\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta,$$

a to smo i tvrdili. Ako je dakle red funkcije $\varphi(z)$ u tačci $z = a$ predstavljen brojem m, a red funkcije $\psi(z)$ brojem n, onda će red funkcije $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ biti broj $m-n$, a red funkcije $\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ broj $n-m$. Redovi funkcija $f(z)$ i $\frac{1}{f(z)}$ jesu dakle i u esencijalnim tačkama jednaki, ali suprotno označeni. Tako bi na primjer red funkcije

$$f(z)=\frac{1+z}{z\,e^{\frac{1}{z}}}$$

u esencijalnoj tačci $z=o$ bio izražen brojem -1. Prema tome smijemo tvrditi ovo: ako je red neke funkcije $f(z)$ u nekoj običnoj ili u nekoj esencijalnoj tačci njezinoj izražen nulom, onda je u toj tačci i red funkcije $\frac{1}{f(z)}$ također $=o$.

Uzmimo sad opet dvije jednograne funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ i pretpostavimo da te funkcije u svima tačkama neke površine zatvorene konturom C imaju isti red. Tada će u svakoj tačci te površine biti

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,dz=o,$$

t. j. biće

$$\int\left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}-\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right)dz=o.$$

Uzmimo sad da je funkcija

$$f(z)=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}-\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

holomorfna u polju, o kome je u ovaj mah riječ; tada će se ta funkcija u tom polju moći razviti u red po Taylor-ovu obrascu. Ako je dakle

$$u=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

onda će biti

$$\frac{d \log u}{dz} = f(z)$$

ili

$$\log u = \int f(z)\, dz.$$

Pošto je funkcija $f(z)$ holomorfna, to će i posljednji integral predstavljati jednu u polju, ograničenom konturom C, holomorfnu funkciju. Označivši tu funkciju sa $g(z)$, moći ćemo prema tome reći, da će funkcija $g(z)$ imati u pomenutom polju karakter jedne cijele funkcije. Dobili smo dakle ovu teoremu:

Teorema. Ako funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ imaju u svima tačkama nekog polja S isti red, ako je razlika logaritamskih izvoda tih funkcija holomorfna, onda će logaritam količnika tih funkcija biti holomorfna funkcija u svima tačkama polja S, ma te tačke bile i esencijalne tačke funkcijâ $\varphi(z)$ i $\psi(z)$.

Vratimo se sad funkciji $g(z)$. Kako je

$$\log u = g(z),$$

biće

$$u = e^{g(z)}.$$

S druge strane je opet

$$u = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

a kad se ta dva obrasca uoče, onda se vidi da je

$$\varphi(z) = \psi(z)\, e^{g(z)}. \tag{1}$$

Tim obrascem je potvrđena ova teorema:

Teorema. Kad je u dvije jednograne funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$, ma one i ne bile meromorfne, u svima tačkama nekog polja S razlika logaritamskih izvoda tih funkcija holomorfna, onda se te dvije funkcije razlikuju samo jednim faktorom $e^{g(z)}$, u kome je sa $g(z)$ označena neka u polju S holomorfna funkcija.

Tom teoremom obuhvaćene su dakle ne samo sve jednograne meromorfne funkcije, već u opće i sve ostale transcendentne funkcije i u tome nju treba smatrati kao generalizaciju jedne osnovne, u teoriji meromorfnih funkcija poznate teoreme.[1] Kako će sad obrazac (1) stajati prema teoriji Weierstrass-ovih „primarnih faktora" i prema poznatoj Mittag-Lefflerovoj teoremi, to ćemo pokazati drugom jednom prilikom.

---

[1] *Weierstrass:* Zur Theorie etc. Werke II. p. 98. i *Forsyth:* Theory of functions of a complex variable, p. 80—81.