О ТЕЖИНАМА АЛГЕБАРСКИХ СКЛОПОВА.

написао **Др. Богдан Гавриловић.**

Нека је дат овај бесконачан низ бројева:

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots \cdots$$

Један од бројева тога низа означићу са i, тај исти или други који број тога низа са j, k, $\cdots$, а претпоставићу да је

$$i \leqslant j \leqslant k \leqslant \cdots \cdots$$

Тада ће склоп $ijk \cdots$ бити један потпуно одређен склоп неког разреда (класе), састављен из елемената датога низа. Збир

$$i + j + k + \cdots$$

зваћу *тежином* алгебарског склопа $ijk \cdots$. Тежина неког склопа биће дакле некакав цео број p.

Јасно је да ће у сваком разреду бити у опште неколико склопова исте тежине p. Према томе можемо се запитати, *колико ће у неком разреду бити склопова једнаке тежине* p. Означивши са N број склопова неке тежине p, моћи ћемо нашу проблему овако формулисати: *тражи се број* N, *кад се зна број* p.

Та питања јавила су ми се, кад сам одређивао аналитичке изразе неких функција, те сам стога мислио да зар не ће бити згорег, ако у комбинаторику уђе један нов појам — појам о тежини склопа. Но начела изнесена у овоме раду моћи ће, надам се поуздано, бити основа алгебарској природи неких важних питања Теоријске Хемије: она ће се вероватно моћи применити у Хемији при израчунавању броја органских једињења некога разреда. И кад се то уочи, онда мислим, не ће требати помињати да ће питања, која се у овом раду расправљају, имати и примене.

Ја сам се ограничио само на склопове другог, трећег и четвртог разреда, јер су ти склопови најважнији. Сем тога се метод, по коме се у та три разреда одређује број N склопова исте тежине, може применити при израчунавању тога броја N и у ма ком другом разреду.

Да почнемо најпре *са склоповима другога разреда*. У томе разреду одређује се N, као што ћемо видети, врло лако. Кад се на име елеменат l буде спојио у склоп са неким елементом $k \leqslant l$ датога низа, онда ћемо добити склоп kl другога разреда. Тежина тога склопа је $k + l$, а сви ти склопови могли би се заједно са тежинама, које им одговарају, исписати ради бољег прегледа у читав низ оваквих таблица:

$1\,l$	p	$2\,l$	p	$3\,l$	p	$4\,l$	p	$5\,l$	p	$\cdots$
11	2	22	4	33	6	44	8	55	10	$\cdots$
12	3	23	5	34	7	45	9	56	11	$\cdots$
13	4	24	6	35	8	46	10	57	12	$\cdots$
14	5	25	7	36	9	47	11	58	13	$\cdots$
15	6	26	8	37	10	48	12	59	14	$\cdots$
16	7	27	9	38	11	49	13	5,10	15	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

По тој схеми види се да међу склоповима типа kl има по један склоп тежине 2 и 3, по два склопа тежине 4 и 5, по три склопа тежине 6 и 7 и т. д. Кад се дакле тежине разреде у групе: у групу прву тежине $2 \cdot 1$ и $2 \cdot 1 + 1$, у групу другу тежине $2 \cdot 2$ и $2 \cdot 2 + 1$, у групу трећу тежине $2 \cdot 3$ и $2 \cdot 3 + 1$, и т. д., онда ће бројем N тачно бити одређена она група, којој тежина припада. Отуда ово правило:

Правило. *Склопова другога разреда тежине $p = 2\mu$ или $p = 2\mu + 1$ има свега μ.*

Пређимо сад *на склопове трећега разреда* и означимо са $P = k + l$ тежину неког склопа kl другога разреда. Кад тај склоп спојимо са неким елементом j датога низа, онда ћемо, кадгод је

$$j \leqslant k \leqslant l,$$

добити по један склоп трећега разреда. Тежина тога склопа биће

$$j + k + l = j + P,$$

а сам склоп бележићу са jP. Но како је

$$j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\ \cdots,$$

а

$$j \leqslant k \leqslant l,$$

то је јасно да је $2j \leqslant P$. По томе се види ово: 1-во, да се у другом разреду сви склопови тежине P не ће у опште састављати у склопове трећега разреда само с једним елементом датога низа и 2-го, да је број тих елемената потпуно одређен кад је P познато. На пример, кад је $P = 8$ или $P = 9$, онда само може бити $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Сви склопови трећега разреда, па према томе и све тежине тих склопова, налазиће се по свему, што мало час поменусмо, у овој схеми:

$$\begin{array}{ccccccccc}
12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & \cdots & (A) \\
 & & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & \cdots & \\
 & & & & 36 & 37 & 38 & \cdots & \\
 & & & & & & 48 & \cdots &
\end{array}$$

а свакад ћемо по мало час поменутом правилу моћи одредити колико ће се склопова разреда другога а тежине P, моћи везивати с елементом j у склопове трећега разреда.

Означимо само са n_1 број оних склопова тежине P, који се могу везивати са 1, а са n_2 број склопова тежине P, везаних у склоп трећега разреда с елементом 2 и т. д., па нека је $P = 2\mu$ или $P = 2\mu + 1$. *Како се 1 може спојити са свима склоповима тежине P, то ће бити $n_1 = \mu$. Елеменат 2 не ће се међутим моћи везати са оним склоповима тежине P који почињу са 1. Те ћемо склопове морати према томе избацити из системе склопова тежине P, па како има свега један једини такав склоп, то ће бити $n_2 = \mu - 1$, кад је било $P = 2\mu$, било $P = 2\mu + 1$. Исто се тако елеменат 3 не ће моћи везивати са оним склоповима тежине P, који почињу са 1 и 2; с тога ћемо и те склопове морати избацити из системе склопова тежине P, па тек ћемо затим остале склопове те тежине спојити с елементом 3. Но како само један једини склоп разреда другога, а тежине P, почиње са 1 и један једини са 2, то је јасно да ће бити свега на број $n_3 = \mu - 2$ склопова типа $3P$ кад је $P = 2\mu$ или $P = 2\mu + 1$ и т. д.*

Ради даљег прегледа исписаћу све те склопове трећега разреда, заједно са тежинама њиховим p_1, p_2, p_3, $\cdots$ и бројевима n_1, n_2, n_3, $\cdots$ који тим тежинама одговарају, у овој таблици:

$1P$	p_1	n_1	$2P$	p_2	n_2	$3P$	p_3	n_3	$\cdots$
12	3	1	24	6	1	36	9	1	$\cdots$
13	4	1	25	7	1	37	10	1	$\cdots$
14	5	2	26	8	2	38	11	2	$\cdots$
15	6	2	27	9	2	39	12	2	$\cdots$
16	7	3	28	10	3	3,10	13	3	$\cdots$
17	8	3	29	11	3	3,11	14	3	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

По тој таблици види се да су бројеви 3, 4, 5 само тежине првога типа $1P$ склопова трећега разреда; даље, да су бројеви 6, 7, 8 само тежине прва два типа $1P$ и $2P$, а бројеви 9, 10, 11 само тежине прва три типа $1P$, $2P$ и $3P$ и т. д. Стога ћемо ту таблицу моћи заменити другом једном: у првом ступцу те нове таблице биће са p означена тежина неког склопа трећега разреда; до тог ступца биће по ступцима исписани бројеви n_1, n_2, n_3, $\cdots$ који тежини p одговарају, а у последњем ступцу биће целокупан број оних склопова трећега разреда што имају исту тежину, т. ј. у последњем ступцу биће вредност броја N, који се тражи. Ево те таблице:

p	n_1						N
3	1						1
4	1	група $\mu = 1$					1
5	2	n_2					2
6	2	1					3
7	3	1	група $\mu = 2$				4
8	3	2	n_3				5
9	4	2	1				7
10	4	3	1	група $\mu = 3$			8
11	5	3	2	n_4			10
12	5	4	2	1			12
13	6	4	3	1	група $\mu = 4$		14
14	6	5	3	2	n_5		16
15	7	5	4	2	1		19
16	7	6	4	3	1	група $\mu = 5$	21
17	8	6	5	3	2	n_6	24
…	…	…	…	…	…	…	…

Све тежине склопова трећега разреда распоређене су, као што видимо, у групе и то тако, *да* *тежина* p *припада групи* μ, *ако је било* $p = 3\mu$, *било* $p = 3\mu + 1$, *било* $p = 3\mu + 2$.

Да видимо сад *како ћемо наћи образац по коме се израчунава број* N. — Загледавши у последњу таблицу уочићемо ово правило:

Правило. *Кад тежина* p *припада некој групи* μ, *онда морамо сабрати* μ *одређених бројева* n_1, n_2, n_3, ... n_μ, *ако хоћемо да добијемо број* N:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_\mu.$$

С друге стране знамо да је

$$p = j + P,$$

а по томе се види ово:

$$\begin{array}{llll}
\text{кад је } j = 1, & \text{онда је} & P = p - 1, \\
\text{» » } j = 2, & \text{» »} & P = p - 2, \\
\text{» » } j = 3, & \text{» »} & P = p - 3, \\
\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\
\text{» » } j = \mu, & \text{» »} & P = p - \mu.
\end{array}$$

Тај број j не може бити већи од μ, јер μ има једну од ове три вредности:

$$\mu = \frac{p}{3}, \ \frac{p-1}{3}, \ \frac{p-2}{3},$$

а $2j$ мора бити $\leqslant P$. *Ако дакле тежину склопа* jP *означимо са* (jP), *онда ће бити*

$$p = (1, p-1), \ (2, p-2), \ (3, p-3), \ \cdots (\mu, p-\mu).$$

Закон по коме се везују елементи 1, 2, 3, $\cdots \mu$ са склоповима тежинâ $p-1$, $p-2$, $p-3$, $\cdots p-\mu$ је међутим потпуно јасан (стр. 4.). Држећи се тога закона, видећемо одмах како ћемо ући у природу бројева n_1, n_2, n_3, $\cdots$ n_μ, по којима се види колико у појединим ступцима наше таблице има склопова тежине p. Са бројем n_1 смо већ начисто: ако на име има μ_1 склопова разреда другога, а тежине $p-1$, онда ће бити $n_1=\mu_1$. Број n_2 добићемо овако. Спојићемо 2 само с оним склоповима разреда другога, а тежине $p-2$, који не почињу са 1. У тој системи склопова има међу тим само један такав склоп. Ако је дакле са μ_2 означен целокупан број склопова разреда другога, а тежине $p-2$, онда ће бити

$$n_2=\mu_2-1.$$

У опште би се сличним разлагањем могло доказати ово: *ако у другом разреду има μ_i склопова тежине $p-i$, онда ће бити*

$$n_i=\mu_i-i+1.$$

Но како је

$$N=n_1+n_2+n_3+\cdots+n_\mu,$$

то ће бити

$$N=\mu_1+(\mu_2-1)+(\mu_3-2)+\cdots+[\mu_\mu-(\mu-1)],$$

т. ј. биће

$$N=\sum_{i=1}^{\mu}\mu_i-\frac{\mu(\mu-1)}{2}.$$

Узмимо сад да нам је дата тежина p некога склопа трећега разреда. Та је тежина или паран или непаран број.

1-во. *Нека је p паран број.* — Тада ће бројеви $p-1$, $p-3$, $p-5$, $\cdots$ бити непарни, а бројеви $p-2$, $p-4$, $p-6$, $\cdots$ парни:

$$\begin{array}{ll} p-1=2\mu_1+1, & p-2=2\mu_2, \\ p-3=2\mu_3+1, & p-4=2\mu_4, \\ p-5=2\mu_5+1, & p-6=2\mu_6, \\ \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \end{array}$$

По томе се види да је

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_2 = \frac{p-2}{2}, \\ \mu_3 &= \mu_4 = \frac{p-4}{2} = \frac{p-2}{2} - 1, \\ \mu_5 &= \mu_6 = \frac{p-6}{2} = \frac{p-2}{2} - 2, \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Кад је p паран број, онда је

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_2 = \frac{p-2}{2}, \\ \mu_3 &= \mu_4 = \mu_1 - 1, \\ \mu_5 &= \mu_6 = \mu_1 - 2, \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

2-го. *Нека је p непаран број.* — У овај мах су бројеви $p-1$, $p-3$, $p-5$, $\cdots$ парни, а бројеви $p-2$, $p-4$, $p-6$, $\cdots$ непарни:

$$\begin{array}{ll} p-1=2\mu_1, & p-2=2\mu_2+1, \\ p-3=2\mu_3, & p-4=2\mu_4+1, \\ p-5=2\mu_5, & p-6=2\mu_6+1, \\ \cdots\quad\cdots & \cdots\quad\cdots \end{array}$$

Према томе је

$$\mu_1=\frac{p-1}{2},$$

$$\mu_2=\mu_3=\frac{p-3}{2}=\frac{p-1}{2}-1,$$

$$\mu_4=\mu_5=\frac{p-5}{2}=\frac{p-1}{2}-2,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

Кад је p непаран број, онда је

$$\mu_1=\frac{p-1}{2},$$

$$\mu_2=\mu_3=\mu_1-1,$$

$$\mu_4=\mu_5=\mu_1-2,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

Но и групе, којима припадају тежине p, могу бити двојаке: или су те групе парне или непарне.

а) Парне групе. У тим групама има склопова и парне и непарне тежине.

1. Кад је p паран број, онда је

$$\mu_1 + \mu_2 = 2\mu_1,$$

$$\mu_3 + \mu_4 = 2\mu_3 = 2(\mu_1 - 1),$$

$$\mu_5 + \mu_6 = 2\mu_5 = 2(\mu_1 - 2),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\mu_{\mu-1} + \mu_\mu = 2\mu_{\mu-1} = 2\left(\mu_1 - \frac{\mu - 2}{2}\right).$$

Стога је

$$\Sigma\mu_i = 2\mu_1 + 2(\mu_1 - 1) + 2(\mu_1 - 2) + \cdots + 2\left(\mu_1 - \frac{\mu - 2}{2}\right).$$

$\therefore$ Кад су бројеви μ и p парни, онда је

$$\Sigma\,\mu_i = \frac{\mu}{2}\left(2\mu_1 - \frac{\mu}{2} + 1\right),$$

или, како је $\mu_1 = \dfrac{p-2}{2}$, то је и

$$\Sigma\,\mu_i = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{\mu + 2}{2}\right),$$

па је према томе и

$$\mathrm{N} = \Sigma\mu_i - \frac{\mu\,(\mu - 1)}{2} = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{3\mu}{2}\right).$$

Отуда ово правило:

Правило. *Кад парна тежина p припада парној групи μ, онда је*

$$\mathrm{N} = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{3\mu}{2}\right).$$

2. Кад је p непаран број, онда је

$$\mu_2 + \mu_3 = 2\mu_2 = 2(\mu_1 - 1),$$
$$\mu_4 + \mu_5 = 2\mu_4 = 2(\mu_1 - 2),$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\mu_{\mu-2} + \mu_{\mu-1} = 2\mu_{\mu-2} = 2\left(\mu_1 - \frac{\mu-2}{2}\right),$$

$$\mu_\mu = \mu_1 - \frac{\mu}{2}.$$

$$\Sigma\mu_i = \mu_1 + 2(\mu_1 - 1) + 2(\mu_1 - 2) + \cdots$$
$$+ 2\left(\mu_1 - \frac{\mu-2}{2}\right) + \left(\mu_1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

или

$$\Sigma\mu_i = \frac{\mu}{2}\left(2\mu_1 - \frac{\mu}{2}\right).$$

Кад се има у виду да је у овај мах

$$\mu_1 = \frac{p-1}{2},$$

онда ће нам јасно бити да ћемо збир $\Sigma\mu_i$ моћи и овако изразити:

$$\Sigma\mu_i = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{\mu+2}{2}\right).$$

Стога је и

$$N = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{3\mu}{2}\right).$$

Добили смо дакле ово правило:

Правило. *Кад је група парна, а тежина непарна, онда је*

$$N = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{3\mu}{2}\right).$$

Последња два правила могу се спојити у ово једно:

Правило. *Кад је група парна, онда је*

$$N = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{3\mu}{2}\right). \qquad (a)$$

b) Непарне групе. И у овим групама има и парних и непарних тежина.

1. Кад је p паран број, онда је

$$\mu_{2j-1} = \mu_{2j} = 2(\mu_1 - j + 1)$$

$$\left(j = 1,\ 2,\ 3, \cdots \mu - \frac{1}{2}\right),$$

а

$$\mu_\mu = \mu_1 - \frac{\mu - 1}{2}.$$

Стога је

$$\Sigma\mu_i = \mu\mu_1 - \frac{(\mu - 1)^2}{4}$$

или, како је

$$\mu_1 = \frac{p-2}{2},$$

$$\Sigma\mu_i = \frac{\mu}{2}p - \frac{(\mu + 1)^2}{4}.$$

$$N = \frac{\mu}{2}p - \frac{3\mu^2 + 1}{4} = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{3\mu}{2}\right) - \frac{1}{4}.$$

Отуда ово правило:

Правило. *Кад је група непарна, а тежина парна, онда је*

$$N = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{3\mu}{2}\right) - \frac{1}{4}. \qquad (b)$$

2. Кад је p непаран број, онда је

$$\mu_{2j} = \mu_{2j+1} = 2(\mu_1 - j)$$

$$\left(j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ \mu - \frac{1}{2}\right),$$

а

$$\mu_1 = \frac{p-1}{2}.$$

У овај мах је дакле

$$\Sigma\mu_i = \frac{\mu}{2}p - \frac{(\mu - 1)(\mu + 3)}{4} - \frac{1}{2},$$

а

$$N = \frac{\mu}{2}p - \frac{3\mu^2 - 1}{4} = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{3\mu}{2}\right) + \frac{1}{4}.$$

Добили смо дакле ово правило:

Правило. *Кад непарној групи μ припада непарна тежина p, онда је*

$$N = \frac{\mu}{2}\left(p - \frac{3\mu}{2}\right) + \frac{1}{4} \qquad (c)$$

Кад су дакле склопови трећега разреда, онда се свакад по обрасцима (a), (b), (c) може наћи вредност броја N, која одговара тежини p тих склопова. Но у тим обрасцима се сем броја p јавља и број μ, којим је, као што знамо, обележена група којој припада тежина p. Тај број μ је међутим једна врло проста функција тежине p. Кад је на име тежина p први члан неке групе, онда је $\mu = \frac{p}{3}$; кад је p други члан у групи, онда је $\mu = \frac{p-1}{3}$, и најзад, кад је p трећи члан неке групе, онда је $\mu = \frac{p-2}{3}$. Стога ћемо у поменутим обрасцима моћи заменити μ једном од те три вредности и тада ће, разуме се, N непосредно бити одређено самом тежином p.

Пре него што бисмо то учинили, поменућемо ово. У последњој таблици (стр. 6.), почињу тежине са бројем 3. Али кад би у тој таблици тежине почињале са 0, 1, 2, а не са 3, 4, 5, $\cdots$, онда бисмо мимо групе $\mu = 1, 2, 3, \cdots$ добили још једну групу — групу $\mu = 0$. Та група морала би се рачунати у парну групу, а кад је група парна, а $\mu = 0$, онда ће по обрасцу (a) бити и $N = 0$. По том резултату види се само то, што се већ *a priori* могло знати: види се на име, да нема међу склоповима трећега разреда ниједнога, чија би тежина била $p = 0, 1, 2$. Но кад се замисли, да се у поменутој таблици уз групе $\mu = 1, 2, 3, 4, \cdots$ јавља и група $\mu = 0$, онда ћемо све тежине моћи изразити бројевима ових типова:

$$6q,\ 6q+1,\ 6q+2,\ 6q+3,\ 6q+4,\ 6q+5$$
$$(q = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots)$$

тако, да ће бројеви типова $6q$, $6q+1$, $6q+2$ свакад припадати парним, а бројеви $6q+3$, $6q+4$, $6q+5$ свакад непарним групама.

Кад се тако буду одвајали бројеви по типовима, онда ће бројеви типа $6q$ или типа $6q+3$ бити у зачељу појединих група (први у парним, други у непарним групама); бројеви типа $6q + 1$ и $6q + 4$ биће у средини, а бројеви $6q + 2$ и $6q + 5$ биће на крају сваке групе. Кад је дакле било $p = 6q$, било $p = 6q + 3$, онда ће бити $\mu = \frac{p}{3}$, а кад је $p = 6q + 1$ или $p = 6q + 4$, онда ће бити $\mu = \frac{p-1}{3}$ и најзад, кад је било $p = 6q + 2$, било $p = 6q + 5$, онда мора бити $\mu = \frac{p-2}{3}$.

Ако сад у обрасцима (a), (b), (c) заменимо број μ једном од вредности.

$$\mu = \frac{p}{3}, \ \frac{p-1}{3}, \ \frac{p-2}{3}$$

— оном која том броју у сваком посебном случају одговара — онда ћемо добити ове обрасце:

a) *Кад је* $p = 6q$, *онда је* $N = \frac{p^2}{12}$,

b) » » $p = 6q + 1$, » » $N = \frac{p^2 - 1}{12}$,

c) » » $p = 6q + 2$, » » $N = \frac{p^2 - 4}{12}$,

d) » » $p = 6q + 3$, » » $N = \frac{p^2 + 3}{12}$,

e) » » $p = 6q + 4$, » » $N = \frac{p^2 - 4}{12}$,

f) » » $p = 6q + 5$ » » $N = \frac{p^2 - 1}{12}$.

Нашли смо дакле обрасце по којима се израчунава број N алгебарских склопова трећега разреда, а тежине p, и према томе нам остаје још *да одредимо N кад су алгебарски склопови разреда четвртог.* —

Да бисмо ушли у природу тих склопова, означићемо са $P = j + k + l$ тежину неког склопа jkl трећега разреда. Кад тај склоп спојимо с неким елементом i датог низа, онда ћемо, кадгод је

$$i \leqslant j \leqslant k \leqslant l,$$

добити један од склопова четвртог разреда. Тај склоп бележићу са iP:

$$iP = ijkl,$$

а тежина његова биће

$$i + j + k + l = i + P.$$

Но како је

$$i,\ j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\ \cdots,$$

а

$$i \leqslant j \leqslant k \leqslant l,$$

то је јасно да ће морати бити $3i \leqslant P$. Према томе ћемо све склопове четвртог разреда, па према томе и све тежине њихове, моћи исписати у овакој једној схеми:

$$\begin{array}{cccccccc}
13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & \cdots \\
 & & & 26 & 27 & 28 & 29 & \cdots \\
 & & & & & & 39 & \cdots
\end{array}$$

а свакад ћемо по мало час поменутим правилима моћи одредити колико ће се склопова разреда трећега, а тежине P, моћи спојити с елементом i у склопове четвртог разреда.

Означимо тога ради са n_1 број оних склопова тежине P, који се могу везивати са 1, а са n_2 број склопова тежине P везаних у склопове четвртог разреда с елементом 2 и т. д. Прво и прво је јасно, да се број 1 може везати са свима склоповима тежине P. *Ако дакле само за један часак означимо са N целокупан број склопова тежине P, онда ће бити $n_1 = N$.*

Да бисмо добили правило по коме се налази број n_2, поменућемо ово. Елеменат 2 не ће се моћи везивати са оним склоповима тежине P, који почињу са 1, а сви ти склопови јављају се у првој врсти схеме (А). Те склопове мораћемо према томе избацити из схеме (А) пре него што будемо почели спајати елеменат 2 са осталим склоповима тежине P. То значи да ће се тек склопови

$$\begin{array}{cccccc} 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & \cdots \\ & & 36 & 37 & 38 & \cdots \\ & & & & 48 & \cdots \end{array} \qquad \text{(B)}$$

крње схеме (А) моћи спајати с елементом 2. Но како је у схеми (B) m-ти склоп n-те врсте за 3 већи од од m-тог склопа n-те врсте схеме (А), то је јасно, *да ће у схеми* (B) *бити исто онолико склопова тежине P, колико у схеми* (А) *има склопова тежине $P - 3$, т. ј. број n_2, по коме се види колико има склопова четвртог разреда, а типа $2P$, биће управо једнак с бројем n_1 склопова типа $1, P - 3$.* Ако овај последњи број означимо са $|\,1,\ P - 3\,|$:

$$n_1 = | 1, P - 3 |,$$

а онај први са $| 2, P |$:

$$n_2 = | 2, P |,$$

онда ће бити

$$| 2, P | = | 1, P - 3 |.$$

Сличним разлагањем могло би се доказати ово опште правило:

Правило. *Ако се број* n_i *означи са* $| i, P |$:

$$n_i = | i, P |,$$

онда је

$$|i, P| = |i-1, P-3| = |i-2, P-6| = \cdots = |1, P-3(i-1)|.$$

Испишимо сад бољег прегледа ради све те склопове четвртог разреда заједно са тежинама њиховим $p_1, p_2, p_3, \cdots$ и с бројевима $n_1, n_2, n_3, \cdots$ који тим тежинама одговарају, у овој таблици:

$1P$	p_1	n_1	$2P$	p_2	n_2	$3P$	p_3	n_3	$\cdots$
13	4	1	26	8	1	39	12	1	$\cdots$
14	5	1	27	9	1	3,10	13	1	$\cdots$
15	6	2	28	10	2	3,11	14	2	$\cdots$
16	7	3	29	11	3	3,12	15	3	$\cdots$
17	8	4	2,10	12	4	3,13	16	4	$\cdots$
18	9	5	2,11	13	5	3,14	17	5	$\cdots$
19	10	7	2,12	14	7	3,15	18	7	$\cdots$
1,10	11	8	2,13	15	8	3,16	19	8	$\cdots$
1,11	12	10	2,14	16	10	3,17	20	10	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

По тој таблици види се да су бројеви 4, 5, 6, 7 само тежине првога типа $1P$ склопова четвртога разреда; даље, да су бројеви 8, 9, 10, 11 само тежине прва два типа $1P$ и $2P$ и т. д. Ту таблицу моћи ћемо дакле заменити и овом таблицом:

p	n_1						N
4	1						1
5	1						1
6	2	група $\mu = 1$					2
7	3	n_2					3
8	4	1					5
9	5	1					6
10	7	2	група $\mu = 2$				9
11	8	3	n_3				11
12	10	4	1				15
13	12	5	1				18
14	14	7	2	група $\mu = 3$			23
15	16	8	3	n_4			27
16	19	10	4	1			34
17	21	12	5	1			39
18	24	14	7	2	група $\mu = 4$		47
19	27	16	8	3	n_5		54
...	...	...	...	...	...	...	...

У првом ступцу те таблице су испод p распоређене тежине неког склопа четвртог разреда, а до тог ступца су по ступцима исписани бројеви n_1, n_2, n_3, $\cdots$ који тим тежинама одговарају. У последњем ступцу је пак исписан целокупан број N свих склопова исте тежине. Сем тога су у тој таблици све тежине разређене у групе и то тако, *да тежина p припада групи μ, ако је било $p = 4\mu$, било $p = 4\mu + 1$, било $p = 4\mu + 2$, било $p = 4\mu + 3$.*

Загледавши у ту таблицу уочићемо одмах ово правило:

Правило. *Кад тежина p припада некој групи μ, онда морамо сабрати μ одређених бројева n_1, n_2, n_3, $\cdots$ n_μ, ако хоћемо да добијемо број N:*

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_\mu.$$

С друге стране је опет

$$p = i + P,$$

а по томе се види ово:

$$\begin{array}{llll}
\text{кад је} & i = 1, & \text{онда је} & P = p - 1, \\
\text{»} \quad \text{»} & i = 2, & \text{»} \quad \text{»} & P = p - 2, \\
\text{»} \quad \text{»} & i = 3, & \text{»} \quad \text{»} & P = p - 3, \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\text{»} \quad \text{»} & i = \mu, & \text{»} \quad \text{»} & P = p - \mu.
\end{array}$$

Тај број i не може бити већи од μ, јер μ има једну од ове четири вредности:

$$\mu = \frac{p}{4}, \ \frac{p-1}{4}, \ \frac{p-2}{4}, \ \frac{p-3}{4},$$

а $3i$ је, као што знамо, $\leqslant P$. *Ако дакле тежину склопа iP означимо са (iP), онда ће бити*

$$p = (1, p-1),\ (2, p-2),\ (3, p-3), \cdots (\mu, p-\mu).$$

Ови резултати подударају се суштином својом потпуно са оним резултатима, које добисмо тражећи вредност броја N у трећем разреду алгебарских склопова, али ће се, као што ћемо одмах видети, бројеви $n_1, n_2, n_3, \cdots n_\mu$ знатно у овај мах разликовати од бројева $n_1, n_2, n_3, \cdots n_\mu$, који нам се јављаху у оном разреду.

Да бисмо ушли у тамну природу тих бројева, држаћемо се поново већ познате нам основе: ослањаћемо се и на позната правила и на закон по коме се у овом разреду везују елементи $1, 2, 3, \cdots \mu$ са склоповима тежинâ $p-1, p-2, p-3, \cdots p-\mu$. Са бројем n_1 смо већ начисто, јер се по том броју види колико има склопова разреда трећега, а тежине $P = p - 1$, везаних с елементом 1 у склопове четвртог разреда. Кад је дакле $p - 1 = 6q$, онда је

$$n_1 = \frac{(p-1)^2}{12},$$

а кад је $p - 1 = 6q + 1$, онда је

$$n_1 = \frac{(p-1)^2 - 1}{12}$$

и т. д. Кад се дакле хоће тачно да одреди вредност броја n_1, онда се мора знати ког је типа број $p - 1$: да ли типа броја $6q$, или типа броја $6q + 1$ и т. д. Ово двоје је међутим јасно: 1-во, да број $p - 1$ мора бити један од бројева $6q, 6q + 1, \cdots 6q + 5$ и

2-го, да ће свакад типови бројева $p-2$, $p-3$, $\cdots$ $p-\mu$ бити потпуно одређени чим се зна тип броја $p-1$.

У први мах о типу броја $p-1$ не ћу водити рачуна, а означићу са N_{p-i} број алгебарских склопова разреда трећега, а тежине $p-i$. Тада ће бити

$$n_1 = N_{p-1}$$

Пређимо сад на број n_2. Тежини $p-2$ одговара у трећем разреду број N_{p-2}. Но како је са n_2 означен број оних склопова разреда трећега, а тежине $P=p-2$, који се смеју везивати с елементом 2 у склопове четвртог разреда, то ћемо, *ако смо ради да добијемо број* n_2, *морати одузети од броја* N_{p-2} *број* α_2 *оних склопова трећега разреда, а те- тежине* $P=p-2$, *које није слободно везивати с елементом* 2. Биће дакле

$$n_2 = N_{p-2} - \alpha_3.$$

Тај број α_2 наћи ћемо чим узимамо у виду правило по коме се добива тежина $P=p-2$ склопова трећега разреда из тежина склопова другога разреда, а по том правилу знамо да се тежина $P=p-2$ добива овако: кад се елеменат 1 састави са склоповима разреда другога, а тежине $p-3$, или кад се елеменат 2 у том истом разреду састави са неким склоповима тежине $p-4$ и т. д.:

$$P = p-2 = (1, p-3),\ (2, p-4),\ (3, p-5), \cdots.$$

Чим се уочи последњи низ симбола, одмах ће нам јасно бити, да ће симбол $(1, p-3)$ представљати тежине оних склопова разреда трећега, а тежине $p-2$, које не ћемо смети везивати с елементом 2. Ако је сад број $p-3$ паран, онда ће, као што знамо, бити свега таквих склопова

$$\alpha_2 = \frac{p-3}{2},$$

а ако је број $p-3$ непаран, онда ће свега тих склопова бити

$$\alpha_2 = \frac{p-3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{p-4}{2},$$

а ти се резултати могу формулисати овим правилом:

Правило. *Кад је p паран број, онда је*

$$\alpha_2 = \frac{p-4}{2},$$

а кад је p непаран број, онда је

$$\alpha_2 = \frac{p-3}{2}.$$

Кад је p паран број, онда је

$$n_2 = N_{p-2} - \frac{p-4}{2},$$

а кад је p непаран број, онда је

$$n_2 = N_{p-2} - \frac{p-3}{2}.$$

Да видимо сад како ћемо наћи број n_3. Тај број треба да нам каже колико има у трећем разреду склопова тежине $P = p - 3$, који се смеју везивати с елементом 3 у склопове четвртог разреда. У трећем разреду има међутим свега N_{p-3} склопова тежине $P = p - 3$, а кад се из системе тих склопова избаце сви они склопови, који почињу са 1 или са 2, онда ће још у тој системи остати они склопови који се дају спојити са 3 у склопове четвртог разреда. То значи да ће број оних склопова, који још буду остали у системи, управо бити n_3. Ако дакле има у трећем разреду α_3 склопова тежине $p - 3$, који почињу са 1, а β_3 склопова тежине $p - 3$, који почињу са 2, онда ће бити

$$n_3 = N_{p-3} - (\alpha_3 + \beta_3).$$

Остаје нам још да одредимо бројеве α_3 и β_3. Тога ради представићемо тежину $P = p - 3$ овим симболима:

$$P = p - 3 = (1, p - 4),\ (2, p - 5),\ (3, p - 6), \cdots$$

По тим симболима види се, да ће у системи склопова разреда трећега, а тежине $p - 3$ почињати са 1 они склопови, чије су тежине представљене симболом $(1, p - 4)$, а са 2 они, чије су тежине симболички представљене са $(2, p - 5)$. Оних првих има свега

$$\alpha_3 = \frac{p-4}{2}$$

кад је $p - 4$ паран број, а

$$\alpha_3 = \frac{p-4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{p-5}{2}$$

кад је $p - 4$ непаран број. А оних других има свега

$$\beta_3 = \frac{p-5}{2} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{p-6}{2} - 1$$

кад је $p - 5$ непаран број, а

$$\beta_3 = \frac{p-5}{2} - 1$$

кад је $p - 5$ паран број.

Но кад је $p - 4$ паран број, онда ће број $p - 5$ бити непаран, а број p паран и обратно, кад је $p - 4$ непаран број, онда је број $p - 5$ паран, а број p непаран. Према свему томе добили смо ово правило:

Правило. *Кад је p паран број, онда је*

$$\alpha_3 = \frac{p-4}{2}, \quad \beta_3 = \frac{p-6}{2} - 1,$$

а кад је p непаран број, онда је

$$\alpha_3 = \frac{p-5}{2}, \quad \beta_3 = \frac{p-5}{2} - 1.$$

$\therefore$ Кад је p паран број, онда је

$$n_3 = N_{p-3} - \left[\frac{p-4}{2} + \left(\frac{p-6}{2} - 1\right)\right],$$

а кад је p непаран број, онда је

$$n_3 = N_{p-3} - \left[\frac{p-5}{2} + \left(\frac{p-5}{2} - 1\right)\right].$$

Да бисмо сад нашли број n_4, поменућемо ово. Свега има N_{p-4} склопова тежине $P = p - 4$, а кад се из те системе склопова избаце они, који почињу било са 1, било са 2, било са 3, онда ће управо још у тој крњој системи склопова остати n_4 склопова. Ако дакле са α_4 означимо број оних склопова тежине $P = p - 4$, који почињу са 1, а са β_4 број оних склопова који почињу са 2, и најзад са γ_4 број оних склопова те тежине $P = p - 4$, који почињу са 3, онда ћемо према свему, што досад рекосмо, моћи овако изразити број n_4:

$$n_4 = N_{p-4} - (\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4).$$

Те бројеве α_4, β_4, γ_4 одредићемо сад исто онако, као што смо мало час одредили бројеве α_2, α_3, β_3, па како је

$$P = p - 4 = (1, p - 5), \ (2, p - 6), \ (3, p - 7), \cdots,$$

то је јасно ово:

1-во, да је

$$\alpha_4 = \frac{p-5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{p-6}{2}$$

кад је $p - 5$ непаран број, а

$$\alpha_4 = \frac{p-5}{2}$$

кад је $p - 5$ паран број;

2-го, да је

$$\beta_4 = \frac{p-6}{2} - 1$$

кад је $p - 6$ паран број, а

$$\beta_4 = \frac{p-6}{2} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{p-7}{2} - 1$$

кад је $p - 6$ непаран број и

3-ће, да је

$$\gamma_4 = \frac{p-7}{2} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{p-8}{2} - 2$$

кад је $p - 7$ непаран број, а

$$\gamma_4 = \frac{p-7}{2} - 2$$

кад је $p - 7$ паран број.

Имајући у виду ово: 1-во, да су бројеви $p - 5$ и $p - 7$ парни (непарни), кад је број p непаран (паран) и 2-го, да је број $p - 6$ паран (непаран), кад је број p паран (непаран), моћи ћемо формулисати ово правило:

Правило. *Кад је p паран број, онда је*

$$\alpha_4 = \frac{p-6}{2}, \quad \beta_4 = \frac{p-6}{2} - 1, \quad \gamma_4 = \frac{p-8}{2} - 2,$$

а кад је p непаран број, онда је

$$\alpha_4 = \frac{p-5}{2}, \quad \beta_4 = \frac{p-7}{2} - 1, \quad \gamma_4 = \frac{p-7}{2} - 2.$$

$\therefore$ Кад је p паран број, онда је

$$n_4 = N_{p-4} - \left[\frac{p-6}{2} + \left(\frac{p-6}{2} - 1\right) + \left(\frac{p-8}{2} - 2\right)\right],$$

а кад је p непаран број, онда је

$$n_4 = \mathrm{N}_{p-4} - \left[\frac{p-5}{2} + \left(\frac{p-7}{2} - 1\right) + \left(\frac{p-7}{2} - 2\right)\right].$$

Кад се добро уочи низ и природа алгебарских процеса, помоћу којих смо мало час одређивали бројеве n_1, n_2, n_3, n_4, онда ће нам јасно бити да се бројеви n_5, n_6, $\cdots$ n_μ могу овако изразити:

$$n_5 = \mathrm{N}_{p-5} - (\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 + \delta_5),$$

$$n_6 = \mathrm{N}_{p-6} - (\alpha_6 + \beta_6 + \gamma_6 + \delta_6 + \varepsilon_6),$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$n_\mu = \mathrm{N}_{p-\mu} - (\alpha_\mu + \beta_\mu + \gamma_\mu + \cdots + \lambda_\mu),$$

а вредност бројева α, β, γ, $\cdots$, што се у тим изразима јављају, биће ово:

1-во. *Кад је p паран број, онда је*

$$\alpha_5 = \frac{p-6}{2}, \qquad \alpha_6 = \frac{p-8}{2}, \qquad \alpha_7 = \frac{p-8}{2}, \qquad \cdots$$

$$\beta_5 = \frac{p-8}{2} - 1, \quad \beta_6 = \frac{p-8}{2} - 1, \quad \beta_7 = \frac{p-10}{2} - 1, \quad \cdots$$

$$\gamma_5 = \frac{p-8}{2} - 2, \quad \gamma_6 = \frac{p-10}{2} - 2, \quad \gamma_7 = \frac{p-10}{2} - 2, \quad \cdots$$

$$\delta_5 = \frac{p-10}{2} - 3, \quad \delta_6 = \frac{p-10}{2} - 3, \quad \delta_7 = \frac{p-12}{2} - 3, \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots \qquad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \qquad \cdots$$

2-го. *Кад је p непаран број, онда је*

$$\alpha_5=\frac{p-7}{2},\qquad \alpha_6=\frac{p-7}{2},\qquad \alpha_7=\frac{p-9}{2},\qquad \ldots$$

$$\beta_5=\frac{p-7}{2}-1,\qquad \beta_6=\frac{p-9}{2}-1,\qquad \beta_7=\frac{p-9}{2}-1,\qquad \ldots$$

$$\gamma_5=\frac{p-9}{2}-2,\qquad \gamma_6=\frac{p-9}{2}-2,\qquad \gamma_7=\frac{p-11}{2}-2,\qquad \ldots$$

$$\delta_5=\frac{p-9}{2}-3,\qquad \delta_6=\frac{p-11}{2}-3,\qquad \delta_7=\frac{p-11}{2}-3,\qquad \ldots$$

$$\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots$$

$$\ldots\quad \ldots\quad \ldots$$

Ако сад добро загледамо у вредности бројева α_2, α_3, α_4, $\cdots$, β_3, β_4, $\cdots$, γ_4, $\cdots$, онда ћемо уочити ово правило:

1-во. *Ако је p иаран број, онда је*

(a)
$$\alpha_2=\alpha_3=\frac{p-4}{2},$$

$$\alpha_4=\alpha_5=\alpha_2-1,$$

$$\alpha_6=\alpha_7=\alpha_2-2,$$

$$\ldots\quad \ldots\quad \ldots$$

(b)
$$\beta_3=\beta_4=\alpha_2-2,$$

$$\beta_5=\beta_6=\alpha_2-3,$$

$$\beta_7=\beta_8=\alpha_2-4,$$

$$\ldots\quad \ldots\quad \ldots$$

(c) $$\gamma_4 = \gamma_5 = \alpha_2 - 4,$$

$$\gamma_6 = \gamma_7 = \alpha_2 - 5,$$

$$\gamma_8 = \gamma_9 = \alpha_2 - 6,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

(d) $$\delta_5 = \delta_6 = \alpha_2 - 6,$$

$$\delta_7 = \delta_8 = \alpha_2 - 7,$$

$$\delta_9 = \delta_{10} = \alpha_2 - 8,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

2-го. *Ако је p непаран број, онда је*

(a) $$\alpha_2 = \frac{p-3}{4},$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_2 - 1,$$

$$\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_2 - 2,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

(b) $$\beta_3 = \alpha_2 - 2,$$

$$\beta_4 = \beta_5 = \alpha_2 - 3,$$

$$\beta_6 = \beta_7 = \alpha_2 - 4,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

(c) $$\gamma_4 = \alpha_2 - 4,$$

$$\gamma_5 = \gamma_6 = \alpha_2 - 5,$$

$$\gamma_7 = \gamma_8 = \alpha_2 - 6,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

(d)
$$\delta_5 = \alpha_2 - 6,$$
$$\delta_6 = \delta_7 = \alpha_2 - 7,$$
$$\delta_8 = \delta_9 = \alpha_2 - 8,$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

Вратимо се сад нашој проблеми, т. ј. потражимо вредност броја N у четвртом разреду алгебарских склопова. Како је

$$\begin{aligned} n_1 &= N_{p-1}, \\ n_2 &= N_{p-2} - \alpha_2 \\ n_3 &= N_{p-3} - (\alpha_3 + \beta_3), \\ n_4 &= N_{p-4} - (\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ n_\mu &= N_{p-\mu} - (\alpha_\mu + \beta_\mu + \gamma_\mu + \cdots + \lambda_\mu), \end{aligned}$$

а

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \cdots + n_\mu,$$

то ће бити

$$\begin{aligned} N = (N_{p-1} + N_{p-2} + N_{p-3} + N_{p-4} + \cdots + N_{p-\mu}) \\ - (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_\mu \\ + \beta_3 + \beta_4 + \cdots + \beta_\mu \\ + \gamma_4 + \cdots + \gamma_\mu \\ + \cdots \quad \cdots \\ + \lambda_\mu) \\ = \Sigma N_{p-i} - \Sigma (\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda). \end{aligned}$$

. ˙ . *Ако збир* ΣN_{p-i} *означимо са* A_μ:

$$\Sigma N_{p-i} = A_\mu,$$

а збир $\Sigma(\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda)$ *са* B_μ:

$$\Sigma(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda)=B_\mu,$$

онда ће број N бити раван разлици бројева A_μ и B_μ:

$$N=A_\mu-B_\mu.$$

Стога нам ваља тражити вредности бројева B_μ и A_μ. Зауставићемо се најпре на броју A_μ. Тај број се састоји из ових елемената:

$$N_{p-1},\ N_{p-2},\ N_{p-3},\ \cdots\ N_{p-\mu}.$$

Но ти се елементи не могу тачно одредити све док се не зна тип броја $p-1$ или у опште тип ма ког броја системе бројева $p-2$, $p-3$, $\cdots p-\mu$. Да бисмо мисли средили и закључке извели, звaћемо тип одређен бројем $6q$ типом првога разреда или типом 1, тип одређен бројем $6q+1$ типом другога разреда или типом 2, $\cdots$ и најзад тип одређен бројем $6q+5$ типом шестога разреда или типом 6, а одређиваћемо типове бројева $p-2$, $p-3$, $\cdots$ $p-\mu$ према типу броја $p-1$. Тада ће нам јасно бити ово: ако је број $p-1$ типа првога разреда, онда ће број $p-2$ имати тип шестога разреда, број $p-3$ тип петога разреда, $\cdots$ број $p-6$ тип другог, а број $p-7$ поново тип првога разреда и т. д. А ако је број $p-1$ типа другога разреда, онда ће број $p-2$ имати тип првога разреда, број $p-3$ тип шестога разреда, $\cdots$ број $p-6$ тип трећега, а број $p-7$ поново тип другога разреда и т. д. и т. д. *У опште ће се дакле типови мењати циклички: тип 1 у тип 6, тип 6 у тип 5, тип 5 у тип 4, $\cdots$ тип 2 у тип 1 и т. д.*

Вратимо се сад правилима по којима се одређује број N_{p-i}. Ако се са a означи један од ових шест бројева:

$$a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = -4,$$
$$a_4 = 3,\ a_5 = -4,\ a_6 = -1,$$

онда ће према нашим правилима бити

$$N_{p-i} = \frac{(p-i)^2 + a}{12}. \qquad (d)$$

Вредност броја a зависиће од типа броја $p - i$, па ако је $p - i$ типа 1, онда ће бити $a = a_1$, а ако је $p - i$ типа 2, онда ће бити $a = a_2$ и т. д. Кад се ти резултати здруже са онима, које мало час добисмо, онда ћемо моћи рећи ово: ако је број $p - 1$ типа 1, онда ће броју $i = 1$ у обрасцу (d) одговарати вредност a_1 броја a, броју $i = 2$ вредност a_6 тога броја a, броју $i = 3$ вредност $a_5, \cdots$ броју $i = 6$ вредност a_2, а броју $i = 7$ поново вредност a_1 тога броја a и т. д. А ако је $p - 1$ типа 2, онда ће у поменутом обрасцу броју $i = 1$ одговарати вредност a_2 броја a, броју $i = 2$ вредност a_1 тога броја a, броју $i = 3$ вредност $a_6, \cdots$ броју $i = 7$ поново вредност a_2 и т. д. и т. д.

Како је међутим

$$A_\mu = \sum_{i=1}^{\mu} N_{p-i},$$

то ћемо према обрасцу (d) моћи A_μ овако изразити:

$$A_\mu = \frac{\Sigma\,(p-i)^2 + \Sigma a}{12}.$$

У последњем изразу имамо два збира. Збир $\Sigma\,(p-i)^2$ не зависи од типа броја $p - 1$, па према томе ни од типова осталих бројева $p - 2,\ p - 3, \cdots p - \mu$, а вредност његова је

$$\sum_{i=1}^{\mu}(p-i)^2=\mu(p-1)(p-\mu)+\frac{\mu(\mu-1)(2\mu-1)}{6}.$$

Онај други збир, т. ј. збир Σa зависи од типова поменутих бројева или, боље рећи, од типа броја $p-1$, али ћемо одмах видети, да је закон по коме то бива, веома прост. Треба само уочити ово двоје: 1-во, *да у збиру* Σa *има свега* μ *чланова и* 2-го, *да је ред, којим у збиру узастопце иду ти чланови, потпуно одређен чим се зна први члан тога збира, т. ј. чим се зна она вредност броја* a, *која одговара типу броја* $p-1$.

Све то биће нам јасније чим загледамо ову таблицу:

p	$p-1$	Σa	
4	3	a_4	група $\mu=1$
5	4	a_5	
6	5	a_6	
7	6	a_1	
8	7	a_2+a_1	група $\mu=2$
9	8	a_3+a_2	
10	9	a_4+a_3	
11	10	a_5+a_4	
12	11	$a_6+a_5+a_4$	група $\mu=3$
13	12	$a_1+a_6+a_5$	
14	13	$a_2+a_1+a_6$	
15	14	$a_3+a_2+a_1$	
16	15	$a_4+a_3+a_2+a_1$	група $\mu=4$
17	16	$a_5+a_4+a_3+a_2$	
18	17	$a_6+a_5+a_4+a_3$	
19	18	$a_1+a_6+a_5+a_4$	
…	…	… … … … …	… … …

Према томе би питање о броју A_μ било доконано. Но поменућу још ово. Кад се будемо одвојили од теорије и кад будемо затражили баш неку посебну вредност броја A_μ, која одговара неком специјалном датом броју, *онда не ћемо морати имати у виду тип броја* $p - 1$, а ево зашто. Поделимо групе у циклусе, па нека у сваком циклусу буде шест група: у првом циклусу групе $\mu = 1, 2, \cdots 6$, у другом групе $\mu = 7, 8, \cdots 12$ и т. д.

Најпре уочимо вредности збира Σa у првом циклусу група. У целом циклусу има $6 \cdot 4 = 24$ броја, а збир Σa у целом циклусу само у два маха не ће бити негативан: не ће на име бити $\Sigma a < 0$ било кад је $p = 4$, било кад је $p = 7$ У првом случају је $\Sigma a = 3$, а у другом је $\Sigma a = 0$. То значи, да збир Σa не ће имати у целом првом циклусу негативну вредност само кад тежина стоји на првом и на четвртом месту у циклусу. Но како је у целом циклусу

$$|\Sigma a| \leqslant 10,$$

то ће разлика између броја

$$S_\mu = \frac{\Sigma (p - i)^2}{12}$$

и броја A_μ морати по апсолутној вредности бити мања од јединице, а по свему, што сад рекосмо о карактеру збира Σa, можемо рећи и то, да разлика $S_\mu - A_\mu$ у целом циклусу само у два маха не ће бити позитивна: кад је p у зачељу циклуса, и тада је

$$S_\mu - A_\mu = -3,$$

или кад је p на четвртом месту у циклусу и тада је

$$S_\mu - A_\mu = 0,$$

т. ј. тада је тачно $S_\mu = A_\mu$. Тај збир Σa одређује се међутим зато, да би се могло наћи A_μ, а уз A_μ и N, па како је собом јасно да мора бити $N = 1$ кад је $p = 4$, т. ј. кад тежина стоји на првом месту поменутог циклуса, онда је уједно јасно и то, да у том случају не ћемо морати ни тражити A_μ. Кад се дакле тај случај искључи, онда се може рећи ово: *у целом првом циклусу група̂ је разлика*

$$\frac{\Sigma (p - i)^2}{12} - A_\mu = S_\mu - A_\mu$$

мања од јединице, а број S_μ *је за* — Σa *дванаестина већи од броја* A_μ. То значи, да се у целом првом циклусу не морамо ни обзирати на број Σa, а број A_μ добива се у том циклусу овако: *дели се* $\Sigma (p - i)^2$ *са* 12; *цео број у количнику је* A_μ.

Први идући циклус група може се међутим свести на прећашњи. Означимо само за један часак са $A_{11}, A_{12}, \cdots A_{1i}$ $(i \leqq 24)$ оне вредности збира Σa, које одговарају првом, другом, трећем, $\cdots$ i-том броју првога циклуса, а са $A_{21}, A_{22}, A_{23}, \cdots A_{2i}$ $(i \leqq 24)$ оне вредности тога збира, што одговарају првом, другом, трећем, $\cdots$ i-том броју другога циклуса. Како је

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = -7,$$

то ће бити

$$A_{2i} = A_{1i} - 7.$$

Стога ћемо, опет не водећи рачуна о првом броју $p = 27 = 6 \cdot 4 + 3$ тога циклуса, добити број A_μ овако: *поделићемо број*

$$\Sigma (p - i)^2 - 7$$

са 12; цео број што се буде јавио у количнику биће број A_μ. А о вредности броја A_μ, која првом броју тога новога циклуса одговара, можемо рећи ово: та вредност добија се чим се подели број

$$\Sigma (p - i)^2 - 7 + 3 = \Sigma (p - i)^2 - 4$$

са 12.

Исто бисмо тако могли доказати да бисмо, тражећи вредност броја A_μ у трећем циклусу група, морали делити број

$$\Sigma (p - i)^2 - 2 \cdot 7 = \Sigma (p - i)^2 - 14$$

са 12; цео број у количнику био би поново број A_μ, а вредност броја A_μ, која одговара првом члану тога циклуса, добиће се кад се број

$$\Sigma (p - i)^2 - 2 \cdot 7 + 3 = \Sigma (p - i)^2 - 11$$

подели са 12 и т. д. и т д.

Остаје нам још *да нађемо вредност броја B_μ*:

$$\begin{aligned} B_\mu = \Sigma (\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda) \\ = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_\mu \\ + \beta_3 + \beta_4 + \cdots + \beta_\mu \\ + \gamma_4 + \cdots + \gamma_\mu \\ + \cdots \quad \cdots \\ + \lambda_\mu. \end{aligned}$$

Да бисмо решили ту проблему, поделићемо опет групе $\mu = 1, 2, 3, \cdots$ у два разреда: на разред парних и разред непарних група, па како у оба разреда има и парних и непарних тежина, то ћемо морати имати у виду свега четири случаја.

1-во. *Нека парној групи припада парна тежина.* — У овај мах је μ паран број, а то ће рећи да ће број чланова у збировима $\Sigma\alpha$, $\Sigma\gamma$, $\cdots$ бити непаран, а у збировима $\Sigma\beta$, $\Sigma\delta$, $\cdots$ паран. Но како је и p паран број, то је

$$\begin{aligned} &\alpha_2 = \alpha_3, \quad \alpha_4 = \alpha_5, \cdots \cdots \\ &\beta_3 = \beta_4, \quad \beta_5 = \beta_6, \cdots \cdots \\ &\gamma_4 = \gamma_5, \quad \gamma_6 = \gamma_7, \cdots \cdots \\ &\delta_5 = \delta_6, \quad \delta_7 = \delta_8, \cdots \cdots \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

па је стога

$$\begin{aligned} \Sigma\alpha &= 2\,(\alpha_2 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_{\mu-2}) + \alpha_\mu = 2A_1 + \alpha_\mu, \\ \Sigma\gamma &= 2\,(\gamma_4 + \gamma_6 + \cdots + \gamma_{\mu-2}) + \gamma_\mu = 2C_1 + \gamma_\mu, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} \Sigma\beta &= 2\,(\beta_3 + \beta_5 + \cdots + \beta_{\mu-1}) = 2B_1, \\ \Sigma\delta &= 2\,(\delta_5 + \delta_7 + \cdots + \delta_{\mu-1}) = 2D_1, \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

Најпре ћемо наћи вредност збира

$$\Sigma\,(\alpha + \gamma + \cdots) = 2\,(A_1 + C_1 + \cdots) + (\alpha_\mu + \gamma_\mu + \cdots).$$

Тога ради написаћемо вредности чланова α_2, α_4, $\cdots$ збира A_1 у један ред; одмах испод тога реда написаћемо у други ред вредности чланова γ_4, γ_6, $\cdots$ збира C_1 и т. д. Тада ћемо добити овај низ количина:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_2 & \alpha_2-1 & \alpha_2-2 & \alpha_2-3 & \alpha_2-4 & \alpha_2-5\cdots \\
\alpha_2-4 & \alpha_2-5 & \alpha_2-6 & \alpha_2-7 & \alpha_2-8 & \cdots \\
\alpha_2-8 & \alpha_2-9 & \alpha_2-10 & \alpha_2-11 & \cdots & \\
\alpha_2-12 & \alpha_2-13 & \alpha_2-14 & \cdots & & \\
\alpha_2-16 & \alpha_2-17 & \cdots & & & \\
\alpha_2-20 & \cdots & & & & \\
\cdots & & & & &
\end{array} \tag{A}$$

У првој врсти те схеме има свега $\frac{\mu}{2} - 1$ елемената, у другој $\frac{\mu}{2} - 2$, у трећој $\frac{\mu}{2} - 3$ и т. д. Стога ћемо збирове елемената друге, треће, $\cdots$ врсте моћи овако изразити:

$$C_1 = [\alpha_2 + (\alpha_2 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \cdots] - \left(\frac{\mu}{2} - 2\right)\cdot 1\cdot 4,$$

$$E_1 = [\alpha_2 + (\alpha_2 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \cdots] - \left(\frac{\mu}{2} - 3\right)\cdot 2\cdot 4,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

Збир $A_1 + C_1 + \cdots$ добиће се дакле, чим се од збира количина

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_2 & \alpha_2-1 & \alpha_2-2 & \alpha_2-3 & \alpha_2-4 & \alpha_2-5\cdots \\
\alpha_2 & \alpha_2-1 & \alpha_2-2 & \alpha_2-3 & \alpha_2-4 & \cdots \\
\alpha_2 & \alpha_2-1 & \alpha_2-2 & \alpha_2-3 & \cdots & \\
\alpha_2 & \alpha_2-1 & \alpha_2-2 & \cdots & & \\
\alpha_2 & \alpha_2-1 & \cdots & & & \\
\alpha_2 & \cdots & & & & \\
\cdots & & & & &
\end{array}$$

одузме збир

$$\left[\left(\frac{\mu}{2}-2\right)\cdot 1\cdot 4+\left(\frac{\mu}{2}-3\right)\cdot 2\cdot 4+\cdots\right]$$

$$=4\left[\left(\frac{\mu}{2}-2\right)\cdot 1+\left(\frac{\mu}{2}-3\right)\cdot 2+\cdots\right].$$

Саберимо сад све чланове последње схеме. Како свега у схеми има $\frac{\mu}{2}-1$ врста, и толико исто колона, то ће тај збир имати ову вредност:

$$\left[\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\alpha_2+\left(\frac{\mu}{2}-2\right)(\alpha_2-1)+\left(\frac{\mu}{2}-3\right)(\alpha_2-2)+\cdots\right.$$

$$=\frac{\mu(\mu-2)}{8}\alpha_2-\left[\left(\frac{\mu}{2}-2\right)\cdot 1+\left(\frac{\mu}{2}-3\right)\cdot 2+\cdots\right].$$

Стога је

$$A_1+C_1+\cdots=\frac{\mu(\mu-2)}{8}\alpha_2-5\left[\left(\frac{\mu}{2}-2\right)\cdot 1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu}{2}-3\right)\cdot 2+\cdots\right],$$

т. ј.

$$A_1+C_1+\cdots=\frac{\mu(\mu-2)}{8}\alpha_2-\frac{5\mu(\mu-2)(\mu-4)}{48}.$$

Према томе је

$$2(A_1+C_1+\cdots)=\frac{\mu(\mu-2)}{4}\alpha_2-\frac{5\mu(\mu-2)(\mu-4)}{24}.$$

Још нам ваља наћи збир

$$\alpha_\mu+\gamma_\mu+\cdots$$

ако хоћемо да одредимо збир $\Sigma(\alpha+\gamma+\cdots)$. У томе збиру $\alpha_\mu+\cdots$ има свега $\frac{\mu}{2}$ чланова, па како је

$$\alpha_\mu = \alpha_2 - \left(\frac{\mu}{2}-1\right),$$

$$\gamma_\mu = \alpha_2 - \left(\frac{\mu}{2}-1\right) - 3,$$

$$\cdots \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

то је и

$$\alpha_\mu+\gamma_\mu+\cdots = \frac{\mu}{2}\alpha_2 - \frac{5\mu(\mu-2)}{8}. \qquad (e)$$

$$\therefore \; \Sigma(\alpha+\gamma+\cdots) = 2(A_1+C_1+\cdots)+(\alpha_\mu+\gamma_\mu+\cdots)$$

$$= \left(\frac{\mu}{2}\right)^2\alpha_2 - \frac{5\mu(\mu-1)(\mu-2)}{24}.$$

Потражимо сад вредност збира

$$\Sigma(\beta+\delta+\cdots) = 2(B_1+D_1+\cdots).$$

Тога ради исписаћемо вредности чланова β_3, β_5, $\cdots$ збира B_1 у један ред; одмах испод тога реда исписаћемо вредности чланова δ_5, δ_7, $\cdots$ збира D_1 у други ред и т. д. Тада ћемо добити овај низ количина:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_2-2 & \alpha_2-3 & \alpha_2-4 & \alpha_2-5 & \alpha_2-6 & \alpha_2-7 \;\cdots \\
\alpha_2-6 & \alpha_2-7 & \alpha_2-8 & \alpha_2-9 & \alpha_2-10 & \;\cdots \\
\alpha_2-10 & \alpha_2-11 & \alpha_2-12 & \alpha_2-13 & \;\cdots & \\
\alpha_2-14 & \alpha_2-15 & \alpha_2-16 & \;\cdots & & \\
\alpha_2-18 & \alpha_2-19 & \;\cdots & & & \\
\alpha_2-22 & \;\cdots & & & & \\
\;\cdots & & & & &
\end{array}$$

Кад се све те количине саберу, добиће се вредност збира $B_1 + D_1 + \cdots$. Али пре него што почнемо сабирати, поменућемо ово. Чим добро загледамо у горњу схему, одмах ћемо видети да ћемо збир $B_1 + D_1 + \cdots$ моћи овако одредити: сабраћемо количине

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_2 & \alpha_2-1 & \alpha_2-2 & \alpha_2-3 & \alpha_2-4 & \alpha_2-5 \cdots \\
\alpha_2-4 & \alpha_2-5 & \alpha_2-6 & \alpha_2-7 & \alpha_2-8 & \cdots \\
\alpha_2-8 & \alpha_2-9 & \alpha_2-10 & \alpha_2-11 & \cdots & \\
\alpha_2-12 & \alpha_2-13 & \alpha_2-14 & \cdots & & \\
\alpha_2-16 & \alpha_2-17 & \cdots & & & \\
\alpha_2-20 & \cdots & & & & \\
\cdots & & & & &
\end{array} \qquad \text{(B)}$$

и одузећемо затим од збира њихова овај збир:

$$\left[\left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\cdot 2 + \left(\frac{\mu}{2} - 2\right)\cdot 2 + \cdots\right]$$

$$= (\mu - 2) + (\mu - 4) + \cdots.$$

Како се међутим схема (B) потпуно подудара са схемом (A), то је јасно да ће збир елемената те схеме (B) бити управо одређен вредношћу збира $A_1 + C_1 + \cdots$. Стога је

$$B_1 + D_1 + \cdots = (A_1 + C_1 + \cdots) - [(\mu-2) + (\mu-4) + \cdots]$$

$$= (A_1 + C_1 + \cdots) - \frac{\mu(\mu-2)}{4};$$

$$\therefore\ 2\,(B_1 + D_1 + \cdots) = \Sigma\,(\beta + \delta + \cdots)$$

$$= \frac{\mu\,(\mu - 2)}{4}\alpha_2 - \frac{5\mu\,(\mu - 2)\,(\mu - 4)}{24} - \frac{\mu\,(\mu - 2)}{2},$$

т j.

$$\Sigma\,(\beta + \delta + \cdots) = \frac{\mu\,(\mu - 2)}{4}\alpha_2 - \frac{\mu\,(\mu - 2)\,(5\mu - 8)}{24}.$$

Но како је

$$\Sigma\,(\alpha + \gamma + \cdots) = \left(\frac{\mu}{2}\right)^2\alpha_2 - \frac{5\mu\,(\mu - 1)\,(\mu - 2)}{24},$$

то ће бити

$$B_\mu = \Sigma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots) = \Sigma(\alpha+\gamma+\cdots) + \Sigma(\beta+\delta+\cdots)$$

$$= \frac{\mu\,(\mu - 1)}{2}\alpha_2 - \frac{\mu\,(\mu - 2)}{24}(10\mu - 13). \qquad (f)$$

По нашој претпоставци је међутим број p паран. Стога је

$$\alpha_2 = \frac{p - 4}{2},$$

па је према томе и

$$B_\mu = \frac{\mu}{4}\left[(\mu - 1)\,(p - 4) - \frac{10\mu^2 - 33\mu + 26}{6}\right].$$

Отуда ово правило:

Правило. *Кад су парне и група и тежина, онда је*

$$B_\mu = \frac{\mu}{4}\left[(\mu - 1)\,(p - 4) - \frac{10\mu^2 - 33\mu + 26}{6}\right],$$

т. ј. кад су парне и група и тежина, онда је

$$N = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\mu}(p-\mu)^2 + \Sigma a}{12}$$

$$-\frac{\mu}{4}\left[(\mu-1)(p-4) - \frac{10\mu^2 - 33\mu + 26}{6}\right].$$

2-го. *Нека је група непарна, а тежина парна.* — У овај мах је μ непаран број, а то ће рећи, да у овај мах има у збировима $\Sigma\alpha$, $\Sigma\gamma$, $\cdots$ паран, а у збировима $\Sigma\beta$, $\Sigma\delta$, $\cdots$ непаран број чланова. Но како је p поново паран број, то ће бити

$$\begin{aligned} B_\mu = {} & 2(\alpha_2 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_{\mu-1}) \\ & + 2(\beta_3 + \beta_5 + \cdots + \beta_{\mu-2}) + \beta_\mu \\ & + 2(\gamma_4 + \gamma_6 + \cdots + \gamma_{\mu-1}) \\ & + 2(\delta_5 + \delta_7 + \cdots + \delta_{\mu-2}) + \delta_\mu \\ & + \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

Да бисмо одредили B_μ, поменућемо ово. Био μ паран или непаран број, свакад ће B_μ бити одређено збиром

$$B_\mu = \Sigma(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots).$$

Повећајмо сад у томе збиру број μ за јединицу, т. ј. напишимо у њему просто место μ свуда $\mu + 1$. Тада ћемо добити овај нов збир:

$$
\begin{aligned}
B_{\mu+1} = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_\mu + \alpha_{\mu+1} & \\
+ \beta_3 + \beta_4 + \cdots + \beta_\mu + \beta_{\mu+1} & \\
+ \gamma_4 + \cdots + \gamma_\mu + \gamma_{\mu+1} & \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
+ \lambda_{\mu+1}, &
\end{aligned}
$$

а по томе збиру види се да је

$$B_{\mu+1} = B_\mu + (\alpha_{\mu+1} + \gamma_{\mu+1} + \cdots) + (\beta_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} + \cdots).$$

Ако је сад група μ непарна, онда ће група $\mu + 1$ бити парна. Кад је дакле број p паран, а број μ непаран, онда се вредност броја $B_{\mu+1}$ одређује по обрасцу (f); само ће се у том случају морати у обрасцу (f) заменити μ са $\mu + 1$. Биће дакле

$$B_{\mu+1} = \frac{(\mu+1)\,\mu}{2}\alpha_2 - \frac{(\mu+1)\,(\mu-1)}{24}(10\mu - 3).$$

Међутим је по обрасцу (e)

$$\alpha_{\mu+1} + \gamma_{\mu+1} + \cdots = \frac{\mu+1}{2}\alpha_2 - \frac{5\,(\mu+1)\,(\mu-1).}{8}\,.$$

С друге стране је опет

$$\beta_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} + \cdots = \left(\alpha_2 - \frac{\mu-1}{2} - 1\right) +$$

$$\left(\alpha_2 - \frac{\mu-1}{2} - 4\right) + \cdots = \frac{\mu-1}{2}\alpha_2 - \frac{\mu-1}{2}\cdot\frac{5\mu-7}{4}\,,$$

а кад се последња три обрасца уоче, онда је јасно да је и

$$B_\mu = B_{\mu+1} - (\alpha_{\mu+1} + \gamma_{\mu+1} + \cdots) - (\beta_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} + \cdots)$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)}{2}\alpha_2 - \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{24}(10\mu - 3) + \frac{\mu-1}{8}$$

или

$$B_\mu = \frac{\mu(\mu-1)}{2}\alpha_2 - \frac{\mu-1}{2}\cdot\frac{10\mu^2 - 23\mu + 3}{12}.$$

Отуда ово правило:

Правило. *Кад је група непарна, а тежина парна, онда је*

$$B_\mu = \frac{\mu-1}{4}\left[\mu(p-4) - \frac{10\mu^2 - 23\mu + 3}{6}\right],$$

т. ј. кад је група непарна, а тежина парна, онда је

$$N = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\mu}(p-i)^2 + \Sigma a}{12}$$

$$- \frac{\mu-1}{4}\left[\mu(p-4) - \frac{10\mu^2 - 23\mu + 3}{6}\right].$$

3-ће. *Нека је група парна, а тежина непарна.* — У овај мах је p непаран број. Стога је

$$\alpha_2 = \frac{p-3}{2}, \quad \alpha_3 = \alpha_4, \quad \alpha_5 = \alpha_6, \cdots\cdots$$

$$\beta_3 = \alpha_2 - 2, \quad \beta_4 = \beta_5, \quad \beta_6 = \beta_7, \cdots\cdots$$

$$\gamma_4 = \alpha_2 - 4, \quad \gamma_5 = \gamma_6, \quad \gamma_7 = \gamma_8 \cdots\cdots$$

$$\delta_5 = \alpha_2 - 6, \quad \delta_6 = \delta_7, \quad \delta_8 = \delta_9 \cdots\cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots\cdots$$

У овај мах је дакле

$$\Sigma\alpha = 2\,(\alpha_3 + \alpha_5 + \cdots + \alpha_{\mu-1}) + \alpha_2 = 2A_1 + \alpha_2,$$
$$\Sigma\gamma = 2\,(\gamma_5 + \gamma_7 + \cdots + \gamma_{\mu-1}) + \gamma_4 = 2C_1 + \gamma_4,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

а

$$\Sigma\beta = 2(\beta_4 + \beta_6 + \cdots + \beta_{\mu-2}) + (\beta_3 + \beta_\mu) = 2B_1 + (\beta_3 + \beta_\mu),$$
$$\Sigma\delta = 2(\delta_6 + \delta_8 + \cdots + \delta_{\mu-2}) + (\delta_5 + \delta_\mu) = 2D_1 + (\delta_5 + \delta_\mu),$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

Збир

$$(\alpha_2 + \gamma_4 + \cdots) + [(\beta_3 + \beta_\mu) + (\delta_5 + \delta_\mu) + \cdots]$$
$$= (\alpha_2 + \beta_3 + \gamma_4 + \delta_5 + \cdots) + (\beta_\mu + \delta_\mu + \cdots)$$

означићу са S. Тада ће се B_μ моћи овако изразити:

$$B_\mu = 2(A_1 + C_1 + \cdots) + 2(B_1 + D_1 + \cdots) + S.$$

Да бисмо одредили вредност збира $A_1 + C_1 + \cdots$, написаћемо поново вредности чланова α_3, α_5, $\cdots$ збира A_1 у један ред; испод тога реда написаћемо вредности чланова збира C_1 и т. д. Тада ћемо добити ову схему:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_2-1 & \alpha_2-2 & \alpha_2-3 & \alpha_2-4 & \alpha_2-5 & \alpha_2-6 \;\cdots \qquad \text{(C)} \\
\alpha_2-5 & \alpha_2-6 & \alpha_2-7 & \alpha_2-8 & \alpha_2-9 & \;\cdots \\
\alpha_2-9 & \alpha_2-10 & \alpha_2-11 & \alpha_2-12 & \cdots & \\
\alpha_2-13 & \alpha_2-14 & \alpha_2-15 & \cdots & & \\
\alpha_2-17 & \alpha_2-18 & \cdots & & & \\
\alpha_2-21 & & & & & \\
\;\cdots & & & & &
\end{array}$$

У првој врсти те схеме има $\frac{\mu}{2}-1$ чланова; у другој врсти има на број $\frac{\mu}{2}-2$ тих чланова и т. д. Кад се сад та схема упореди са схемом (А), видеће се одмах, да ће се збир $A_1+C_1+\cdots$ у овај мах добити чим се од збира свих елемената схеме (А) одузме збир

$$\left(\frac{\mu}{2}-1\right)+\left(\frac{\mu}{2}-2\right)+\cdots=\frac{\mu(\mu-2)}{8}.$$

То значи да је у овај мах

$$A_1+C_1+\cdots=\left[\frac{\mu(\mu-2)}{8}\alpha_2-\frac{5\mu(\mu-2)(\mu-4)}{48}\right]-\frac{\mu(\mu-2)}{8},$$

па је према томе и

$$2(A_1+C_1+\cdots)=\frac{\mu(\mu-2)}{4}\left(\alpha_2-\frac{5\mu-14}{6}\right).$$

Пређимо сад на збир $B_1+D_1+\cdots$. Тај збир моћи ће се изразити збиром елемената ове схеме:

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_2-3 & \alpha_2-4 & \alpha_2-5 & \alpha_2-6 & \alpha_2-7 \ \cdots \\
\alpha_2-7 & \alpha_2-8 & \alpha_2-9 & \alpha_2-10 & \cdots \\
\alpha_2-11 & \alpha_2-12 & \alpha_2-13 & \cdots & \\
\alpha_2-15 & \alpha_2-16 & \cdots & & \\
\alpha_2-19 & \cdots & & & \\
\cdots & & & &
\end{array}$$

У првој врсти ове схеме има $\frac{\mu}{2} - 2$ чланова, у другој има свега $\frac{\mu}{2} - 3$ чланова и т. д., а кад се цела схема упореди са схемом (C), видеће се да је

$$B_1 + D_1 + \cdots = (A_1 + C_1 + \cdots)$$
$$- \left[(\alpha_2 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \cdots + \left(\alpha_2 - \frac{\mu}{2} + 1\right)\right]$$
$$+ 2\left[\left(\frac{\mu}{2} - 2\right) + \left(\frac{\mu}{2} - 3\right) + \cdots + 2 + 1\right],$$

а то ће рећи да је

$$2(B_1 + D_1 + \cdots) = \frac{(\mu - 2)(\mu - 4)}{4}\left(\alpha_2 - \frac{5\mu - 12}{6}\right).$$

Још нам остаје да одредимо збир

$$S = (\alpha_2 + \beta_3 + \gamma_4 + \delta_5 + \cdots) + (\beta_\mu + \delta_\mu + \cdots).$$

Како је

$$\beta_3 = \alpha_2 - 2,\ \gamma_4 = \alpha_2 - 4,\ \delta_5 = \alpha_2 - 6,\ \cdots,$$

биће

$$\alpha_2 + \beta_3 + \gamma_4 + \delta_5 + \cdots = (\mu - 1)\,\alpha_2 - (\mu - 1)(\mu - 2).$$

С друге стране је опет

$$\beta_\mu = \alpha_2 - \frac{\mu}{2} - 1,$$

$$\delta_\mu = \alpha_2 - \frac{\mu}{2} - 4,$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

Стога је

$$\beta_\mu + \delta_\mu + \cdots = \frac{\mu-2}{2}\alpha_2 - \frac{\mu-2}{4}\frac{5\mu-8}{2}, \qquad (g)$$

а

$$S = \frac{3\mu-4}{2}\alpha_2 - \frac{\mu-2}{8}(13\mu-16).$$

Нашли смо дакле вредности она три збира, којима је одређена вредност броју B_μ. Према томе је

$$B_\mu = \frac{\mu(\mu-1)}{2}\alpha_2 - \frac{\mu(\mu-2)}{24}(10\mu-7). \qquad (h)$$

Добили смо дакле ово правило:

Правило. *Кад је група парна, а тежина непарна, онда је*

$$B_\mu = \frac{\mu}{4}\left[(\mu-1)(p-3) - \frac{10\mu^2-27\mu+14}{6}\right],$$

т. ј. кад је група парна, а тежина непарна, онда је

$$N = \frac{\sum_{i=1}^{\mu}(p-i)^2 + \Sigma a}{12}$$

$$- \frac{\mu}{4}\left[(\mu-1)(p-3) - \frac{10\mu^2-27\mu+14}{6}\right].$$

4-то. *Нека непарној групи припада непарна тежина.* — Број B_μ изразићемо овако:

$$B_\mu = B_{\mu+1} - (\alpha_{\mu+1} + \gamma_{\mu+1} + \cdots) - (\beta_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} + \cdots).$$

У овај мах је тежина p непарна, а број $\mu + 1$ паран; према обрасцу (h) биће дакле

$$B_{\mu+1} = \frac{(\mu + 1)\,\mu}{2}\alpha_2 - \frac{(\mu + 1)\,(\mu - 1)}{24}(10\mu + 3).$$

Но како је

$$\alpha_{\mu+1} = \alpha_2 - \frac{\mu - 1}{2},$$

$$\gamma_{\mu+1} = \alpha_2 - \frac{\mu - 1}{2} - 3,$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

биће и

$$\alpha_{\mu+1} + \gamma_{\mu+1} + \cdots = \frac{\mu + 1}{2}\alpha_2 - \frac{5\,(\mu + 1)\,(\mu - 1)}{8}.$$

Збир $\beta_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} + \cdots$ добићемо међутим чим у обрасцу (g) заменимо μ са $\mu + 1$:

$$\beta_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} + \cdots = \frac{\mu - 1}{2}\alpha_2 - \frac{\mu - 1}{4} \cdot \frac{5\mu - 3}{2}.$$

$$\therefore \quad B_\mu = \frac{\mu\,(\mu - 1)}{2}\alpha_2 - \frac{(\mu - 1)\,(\mu - 2)}{24}(10\mu - 3) - \frac{(\mu - 1)\,(2\mu - 3)}{8}$$

или

$$B_\mu = \frac{\mu\,(\mu - 1)}{2}\alpha_2 - \frac{\mu - 1}{2} \cdot \frac{10\mu^2 - 17\mu - 3}{12}.$$

Отуда ово правило:

Правило. *Кад су непарне и група и тежина, онда је*

$$B_\mu = \frac{\mu - 1}{4}\left[\mu\,(p-3) - \frac{10\mu^2 - 17\mu - 3}{6}\right],$$

т. ј. кад непарној групи припада непарна тежина, онда је

$$N = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\mu}(p-i)^2 + \Sigma a}{12}$$
$$- \frac{\mu - 1}{4}\left[\mu\,(p-3) - \frac{10\mu^2 - 17\mu - 3}{6}\right].$$

Поменућу само још то, да збир $\Sigma\,(p-i)^2$ треба израчунавати по обрасцу

$$\Sigma\,(p-i)^2 = \mu\,(p-1)\,(p-\mu) + \frac{\mu\,(\mu-1)\,(2\mu-1)}{6}.$$

Према томе би сва у почетку ове расправе постављена питања била решена.

Београд
14. јануара 1900. год.