O ostacima jednogranih funkcija.

Čitano u sjednici matematično-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 11. ožujka 1899.

NAPISAO DR. BOGDAN GAVRILOVIĆ.

Pretpostaviću, da je funkcija $f(z)$ holomorfna u nekom kraju ravni, ograničenom koncentričnim krugovima K i k, i uzeću, da je krug K veći od kruga k. Središte a tih krugova neka je ili obična tačka, ili pol, ili esencijalna izolovana tačka funkcije $f(z)$. Osim toga pretpostaviću, da funkcija $f(z)$ nema ni jedne nule u pomenutom kraju ravni.

Ako je tačka a obična tačka funkcije $f(z)$, onda je ostatak funkcije

$$D \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \tag{1}$$

ili $= o$, ili $= m$. U prvom slučaju je $f(a) = o$, a u drugom slučaju je tačka a nula m-toga reda za funkciju $f(z)$. A ako je tačka a pol m-toga reda za funkciju $f(z)$, onda će[1]) ta tačka biti prost pol (pôle simple) ostatka $-m$ za funkciju (1). To znači, da je ostatak Ra logaritamskog izvoda funkcije $f(z)$ u običnoj tačci i u polu neke jednograne funkcije cio broj. No i kad je tačka a esencijalna izolovana tačka, i onda će ostatak logaritamskog izvoda date funkcije biti cio broj,[2]) a to se može ovako dokazati. Funkcija

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

---

[1]) *Briot-Bouquet.* Fonctions elliptiques, p. 197.

[2]) *Weierstrass.* Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Werke, t. II.

je holomorfna u kraju, što leži između periferijâ krugova K i k. S toga će po Laurentovoj teoremi biti:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots \dots \qquad (2)$$

U tome izrazu je sa b_i označen ovaj integral:

$$b_i = \frac{1}{2\pi i} \int_k (z-a)^{i-1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Kad je dakle $i = 1$, onda je

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

t. j. koeficijenat b_1 je upravo ostatak logaritamskóg izvoda funkcije $f(z)$ u tačci a.

Ako integrujemo desnu i lijevu stranu ekvacije (2), dobićemo ovo:

$$\log f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z-a)^n} + b_1 \log (z-a),$$

a taj se izraz može ovako napisati:

$$\log f(z) = P_1 (z-a) + P_2 \left(\frac{1}{z-a}\right) + b_1 \log (z-a).$$

Po tome se vidi, da je

$$f(z) = e^{P_1 (z-a) + P_2 \left(\frac{1}{z-a}\right) + b_1 \log (z-a)}.$$

Uzmimo sad, da je promjenljiva z obišla m puta oko tačke a. U tome slučaju ne će funkcije P_1 i P_2 promijeniti svoju vrijednost, a funkcija

$$e^{b_1 \log (z-a)}$$

izmijeniće se u funkciju

$$e^{b_1 [\log (z-a) + 2m\pi i]} = e^{b_1 \log (z-a)} c^{2b_1 m\pi i}$$

No kako je funkcija $f(z)$ jednograna, to će činitelj

$$e^{2b_1 m\pi i}$$

morati biti $= 1$. Taj činitelj će međutim biti $= 1$ samo ako je b_1 cio broj. Broj b_1, t. j. ostatak funkcije

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

mora dakle biti cio broj.

Kad je funkcija $f(z)$ meromorfna, onda ostatak logaritamskog izvoda prikazuje tako zvani red funkcije u svakoj pojedinoj tačci. Po analogiji ćemo s toga, i kad je tačka a esencijalna tačka funkcije $f(z)$, cio broj

$$\frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

zvati redom funkcije $f(z)$.

Pređimo sad odmah na najopćenitiji slučaj, pa pretpostavimo da u površini zatvorenoj konturom C funkcija $f(z)$ ima više izolovanih esencijalnih tačaka $a_1, a_2, \ldots$ i osim njih još i nulâ $b_1, b_2, \ldots$ i polova $c_1, c_2, \ldots$. Redovi funkcije neka su u esencijalnim tačkama $e_1, e_2, \ldots$, u nulama $n_1, n_2, \ldots$, a u polovima $p_1, p_2, \ldots$. Još ću pretpostaviti da kontura C ne prolazi kroz nijednu nulu i kroz nijednu singularnu tačku funkcije $f(z)$. U tom slučaju biće sve nule i svi polovi funkcije $f(z)$ prosti polovi funkcije

$$\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Kad bismo dakle oko nulâ, oko polova i oko svih esencijalnih tačaka opisali krugove vrlo mala polupречnika tako, da ti krugovi ne prelaze jedan preko drugoga, onda bi u površini zatvorenoj tim krugovima i datom konturom C funkcija

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

bila holomorfna. Označimo konturu te nove površine sa C'. Tada će biti

$$\int\limits_{C'} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = o,$$

a to znači, da je

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \Sigma n - \Sigma p + \Sigma e = N - P + E. \qquad (3)$$

Prema tome je algebarski zbir $N - P + E$ redova funkcije $f(z)$ u nekoj površini zatvorenoj konturom C za tu površinu cjelokupan ostatak logaritamskog izvoda funkcije $f(z)$.

Po obrascu (3) vidi se u ostalom i ovo: kad se znaju singularne tačke neke funkcije u nekoj izvjesnoj površini, onda se svakad može izračunati i koliko nula ta funkcija ima u toj površini; ili, kad se znaju nule i esencijalne tačke funkcije $f(z)$ u nekoj izvjesnoj površini, onda se može izračunati i koliko polova ima ta funkcija u pomenutoj površini. Razumije se, da se pri tom sračunavanju dvoguba nula ili dvogubi pol računaju u dvije nule ili u dva pola, troguba nula ili trogubi pol u tri nule ili u tri pola itd.

Uzmimo sad dvije funkcije: funkciju $\varphi(z)$ i funkciju $\psi(z)$, pa pretpostavimo 1. da je u površini zatvorenoj konturom c funkcija $\varphi(z)$ holomorfna i 2. da je tačka a te površine esencijalna tačka funkcije $\psi(z)$. Pita se, kako ćemo u tom slučaju odrediti vrijednost integrala

$$I = \int\limits_{c} \varphi(z)\,\psi(z)\, dz.$$

Jasno je, da ćemo vrijednost integrala I znati, čim nam bude poznat ostatak R funkcije $\varphi(z)\ \psi(z)$ u tačci a, jer je

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \varphi(z)\,\psi(z)\,dz,$$

pa je s toga i

$$I = 2\pi i\, R.$$

Taj ostatak R naći ću ovako. Kako je funkcija $\varphi(z)$ holomorfna u okolini tačke a, biće

$$\varphi(z) = A_0 + A_1\,(z-a) + A_2\,(z-a)^2 + \ldots .$$

S druge strane će se opet funkcija $\psi(z)$ moći razviti u red po po Laurentovoj teoremi. Biće dakle

$$\psi(z) = P_1\,(z-a) + P_2\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Prema tome je i

$$\varphi(z)\,\psi(z) = \varphi(z)\,P_1\,(z-a) + \varphi(z)\,P_2\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Na desnoj strani posljednjega izraza imamo dvije funkcije: prva je proizvod dviju holomorfnih funkcija, pa je s toga ta funkcija također holomorfna u okolini tačke a; ona druga između tih dviju funkcija, t. j. funkcija

$$\varphi(z)\,P_2\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

moći će se međutim ovako napisati.

Funkcija P_2 ovog je oblika:

$$P_2\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} +$$

$$+ \frac{B_3}{(z-a)^3} + \ldots .$$

Prema tome je

$$
\begin{aligned}
\varphi(z)\, P_2\left(\frac{1}{z-a}\right) = & (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + \ldots) \\
& + (A_2 B_1 + A_3 B_2 + A_4 B_3 + \ldots)\,(z-a) \\
& + (A_3 B_1 + A_4 B_2 + A_5 A_3 + \ldots)\,(z-a)^2 \\
& + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
& + (A_0 B_1 + A_1 B_2 + A_2 B_3 + \ldots)\,(z-a)^{-1} \\
& + (A_0 B_2 + A_1 B_3 + A_2 B_4 + \ldots)\,(z-a)^{-2} \\
& + (A_0 B_3 + A_1 B_4 + A_2 B_5 + \ldots)\,(z-a)^{-3} \\
& + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Taj red je ponovo oblika Laurentnova reda tako, da je

$$\varphi(z)\, P_2\left(\frac{1}{z-a}\right) = p_1\,(z-a) + p_2\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Funkcija $p_1\,(z-a)$ je holomorfna u okolini tačke a, pa i u tačci a, a funkcija

$$p_2\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

nije holomorfna samo u tačci a, a proizvod $\varphi(z)\,\psi(z)$ moći ćemo ovako izraziti:

$$\varphi(z)\,\psi(z) = \varphi(z)\,P_1\,(z-a) + p_1\,(z-a) + $$

$$+ p_2\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Po tome se vidi, da je ostatak funkcije $\varphi(z)\,\psi(z)$ u tačci a ovo

$$R = A_0 B_1 + A_1 B_2 + A_2 B_3 + \ldots = \Sigma A_{i-1} B_i\,,$$

a to će reći, da je

$$\int_c \varphi(z)\psi(z)dz = 2\pi i\,\Sigma A_{i-1}\, B_i\,. \qquad (4)$$

Tim bi bila određena vrijednost integrala I. Kad bi tačka a bila obična tačka funkcije $\psi(z)$, onda bi bilo $I = o$, a kad bi ta tačka za funkciju $\psi(z)$ bila pol m-toga reda, onda u zbiru $\Sigma A_{i-1} B_i$ ne bi moglo biti više od m članova.

Uočimo još samo ovaj specijalan slučaj. Kako je funkcija $\psi(z)$ ma kakva funkcija, to ćemo moći uzeti i da je $\psi(z)$ logaritamski izvod neke funkcije $f(z)$, za koju bi tačka a bila neka singularna tačka. U tom slučaju bi obrazac (4) bio ovog oblika:

$$\int_c \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \, \Sigma A_{i-1} \, B_i ,$$

pa je prema tome i

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Sigma A_{i-1} \, B_i . \qquad (5)$$

Ako sad pretpostavimo, da tačka a nije esencijalna tačka funkcije $f(z)$, već da je ta tačka za funkciju $f(z)$ pol m-toga reda, onda će biti

$$B_1 = -m, \; B_2 = B_3, = \ldots = o,$$

pa kako je $A_0 = \varphi(a)$, to će se tada obrazac (4) preobraziti u ovaj poznati obrazac:[1])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - m\varphi(a)$$

Jasno je, da u površini zatvorenoj konturom c funkcija $\psi(z)$ može imati i više od jedne singularne tačke, pa neka su te tačke označene sa $a_1, a_2, \ldots a_n$. U tom slučaju će izračunavanje pomenutog integrala I biti svedeno na slučaj, koji sam malo čas imao u vidu. Ako su na ime $R_1, R_2, \ldots R_n$ ostaci funkcije $\varphi(z) \, \psi(z)$ u tačkama $a_1, a_2, \ldots a_n$, onda je

$$\int_c \varphi(z) \psi(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R_k .$$

[1]) v. *Jordan*. Cours d'Analyse, t. II. p. 297. 1894.

*

Dakle, ako je u tački a

$$\frac{B_{1k}}{z-a_k}+\frac{B_{2k}}{(z-a_k)^2}+\ldots$$

karakteristična funkcija za funkciju $\psi(z)$, i ako je funkcija $\varphi(z)$ holomorfna u površini zatvorenoj konturom c tako, da se funkcija $\varphi(z)$ u oblasti tačke a_k može razviti u ovakav red:

$$\varphi(z)=A_{0k}+A_{1k}(z-a_k)+A_{2k}(z-a_k)^2+\ldots,$$

onda će biti

$$\int\limits_c \varphi(z)\psi(z)\,dz=2\pi i\,\Sigma\Sigma A_{i-1,\,k}\,B_{ik}\;.$$

$$(i=1,\,2,\,\ldots,\quad k=1,\,2,\,\ldots\,n)$$

Uzeću i jedan primjer. Neka je

$$f(z)=\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1+z}$$

Tada je

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{1}{z^2(1+z)}$$

Točka $z=o$ je, kao što vidimo, esencijalna tačka funkcije $f(z)$, ali je ta tačka pol drugoga reda za logaritamski izvod funkcije $f(z)$. Ako po Laurentovoj teoremi razvijemo u red funkciju

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

oko tačke $z=o$, dobićemo ovo:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-1+z-z^2+\ldots$$

$$+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\;.$$

Karakteristična funkcija izvoda

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

je dakle u tačci $z = o$ ovo:

$$p_2\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2},$$

t. j. brojem 1 je prikazan red funkcije $f(z)$ u esencijalnoj tačci njezinoj $z = o$.

Neka je sad $\varphi(z) = -z$. Tada je

$$\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{dz}{z(z+1)} = 1,$$

jer je u ovaj mah

$$A_0 = o, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = A_3 = \ldots = o,$$

a

$$B_1 = 1, \quad B_2 = -1.$$

U ostalom to se i neposredno vidi. Kako je na ime

$$\frac{1}{z(1+z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1},$$

biće i

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{dz}{z(z+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{dz}{z+1}.$$

Prvi integral na desnoj strani je $= 1$, a drugi je $= 0$, jer je funkcija pod integralnim znakom holomorfna u površini ograničenoj konturom c s toga, što se u ovaj mah kontura c proteže samo do najbliže tačci $z = 0$ singularne tačke funkcije

$$\frac{f'(z)}{f(z)},$$

a to će reći do tačke $z = -1$.

Dalje, neka je

$$\varphi(z) = e^{z \cos \alpha} \cos(z \sin \alpha).$$

Ako tu funkciju razvijemo u red oko tačke $z = o$, dobićemo ovaj rezultat:

$$e^{z \cos \alpha} \cos(z \sin \alpha) = 1 + z \cos \alpha + \frac{z^2}{2!} \cos 2\alpha + \frac{z^3}{3!} \cos 3\alpha + \ldots.$$

U ovaj mah je dakle

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \cos \alpha, \quad A_2 = \frac{\cos 2\alpha}{2!}, \ldots,$$

pa je s toga duž konture c, koja iz ravni isijeca jedan dio površine, u kome funkcija $f(z)$ nema nijedne druge singularne tačke osim esencijalne tačke $z = o$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1 - \cos \alpha,$$

a to znači, da je

$$\int_c \frac{e^{z \cos \alpha} \cos(z \sin \alpha)}{z^2 (z+1)} dz = 2\pi i (\cos \alpha - 1).$$

I tako se pomoću pomenutog obrasca vrlo lako nalazi vrijednost mnogih određenih integrala.

Sur les résidus de la dérivée logarithmique des fonctions uniformes d' une variable complexe.

La première partie de ce travail est consacrée à l' étude particulière des ordres des fonctions uniformes d' une variable complexe. En s' appuyant sur le théorème de Laurent on démontre d' une manière simple que le résidu de la dérivée logarithmique relatif à un point quelconque critique est un nombre entier, puis on recherche l' ordre des fonctions uniformes qui ont dans l' intérieur d' un contour un certain nombre de zéros, de pôles, et de points essentiels.

Dans la seconde partie on s' occupe d' un problème général. On suppose, en effet, que dans l' intérieur d' un contour fermé c la fonction $\varphi(z)$ soit holomorphe, tandis que la fonction $\psi(z)$ ait des points singuliers (des pôles ou des points essentiels) a_1, a_2, . . . a_n et on se propose d' évaluer l' intégrale

$$\int_c \varphi(z)\,\psi(z)\,dz\,.$$

On démontre le résultat suivant: si on développe la fonction $\varphi(z)$ dans la série suivante:

$$\varphi(z) = A_{0k} + A_{1k}(z-a_k) + A_{2k}(z-a_k)^2 + \ldots\ldots$$

et si pour la fonction $\psi(z)$ la série

$$\frac{B_{1k}}{z-a_k} + \frac{B_{2k}}{(z-a_2)^2} + \ldots\ \ldots$$

est la fonction caractéristique du point a_k, alors

$$\int_c \varphi(z)\,\psi(z)\,dz = 2\pi i\,\Sigma\Sigma A_{i-1,\,k}\,B_{ik}\,.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, n)$$

De cette formule générale on déduit immédiatement l' intégrale bien connue de Cauchy quand on suppose simplement que la fonction $\psi(z)$ soit la dérivée logarithmique d' une fonction méromorphe dans l' intérieur de contour fermé C.