PRIMENE RAČUNARA – februar 2007.

1. a) Za niz ključeva 2, 6, 1, 9, 2, 9, 1, 9, 2, 9 nacrtati hip koji se dobija kada se ključevi dodaju jedan za drugim u datom redosledu hipu (koji je na početku prazan). Odrediti hip koji se dobija kada se obriše minimalni ključ. Pretpostaviti da hip je uređen relacijom '<', tj. svako dete mora biti veće od svog roditelja.
b) Dato je *k* rastuće uređenih nizova sa ukupno *n* elemenata. Konstruisati algoritam složenosti *O(n log k)* za objedinjavanje svih datih nizova u jedan rastuće uređen niz.

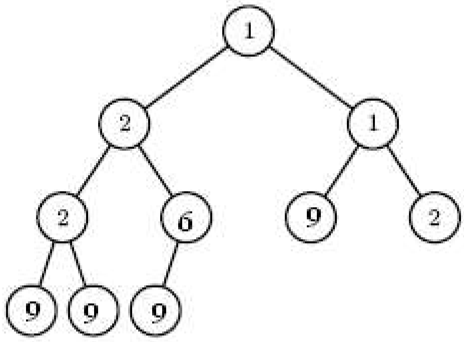
2. Konstruisati algoritam koji konvertuje dekadni broj u njegov oktalni zapis. Dokazati korektnost tog algoritma. OKRENITE!!!

3. Pronaći uparivanje sa maksimalnim brojem grana za bipartitivni graf G=(V,E) gde V={{a, b, c, d}, {1, 2, 3, 4}}, E={ (a,1), (a, 2), (b, 1), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 3), (d, 4)}. Da li je dato uparivanje savršeno?

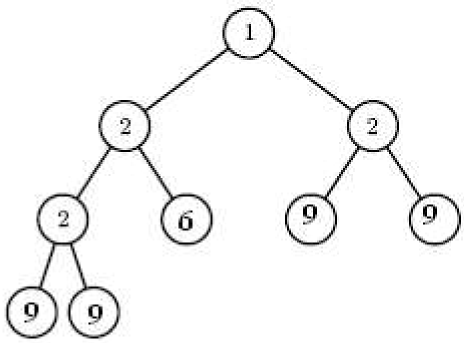
4. Dat je prirodan broj *k* i neusmeren graf G=(V,E) čiji svi čvorovi imaju paran stepen. Dokazati da je NP-kompletan problem koji ustanovljuje da li u G postoji skup C sa ne više od k čvorova tako da svaka grana iz E je susedna bar jednom od čvorova iz skupa C.

REŠENJA:

1. Hip koji se dobija nakon umetanja ključeva izgleda:



Hip koji se dobija nakon uklanjanja minimalnog ključa sa prethodne slike izgleda:



b)

KORACI ALGORITMA:
1. postaviti u hip k prvih (minimalnih) elemenata tako da u korenu bude najmanji elemenat
2. u svakom narednom koraku:
 2.1 ukloniti iz hipa najmanji elemenat (iz korena) X i postaviti X u novi niz
 2.2 umetnuti u hip sledeci po velicini elemenat iz onog niza kome je pripadao uklonjeni element X (zbog toga se u hipu mora za svaki elemenat cuvati i podatak iz kog je niza potekao).

OBRAZLOŽENJE SLOŽENOSTI:

Za svaki od *n* elemenata obavlja se operacija umetanja u hip koji ima *k* elemenata, uklanjanje iz hipa sa *k* elemenata, tj. svaka od navedenih operacija ima složenost O(log k).
Stoga je vremenska složenost algoritma O(n log k)

2.

Algoritam Okt cifre(*n*);
Ulaz: *n* (prirodan broj)
Izlaz: *b* (niz oktalnih cifara broja *n*)

```
t := n;
k := 0;
while (t > 0) {
  k = k + 1;
  b[k] = t % 8; t = t / 8;}
```

Dokaz korektnosti algoritma:
invarijanta petlje, tj. induktivna hipoteza: Neka je *m* broj cije su oktalne cifre dobijene u *k* prvih prolazaka kroz petlju, pri cemu je *b*[1] najnizi bit.
Tada je $t \cdot 8^k + m = n$
Baza indukcije: Za $k = 0$ je $t = n$ i $m = 0$, te je ovo tvrđenje tačno.
Neka je induktivna hipoteza tačna za neko
$k != 0$. U narednom prolasku kroz petlju dobijaju se nove vrednosti $b[k+1] = t \% 8$, $t' = t / 8$, i
$m = b[k+1] \cdot 8^k + m = (t \% 8) \cdot 8^k + m$, te je
$t' \cdot 2^k + 1 + m' = (t / 8) \cdot 8^k + 1 + (t \% 8) \cdot 8^k + m = 8^k (8 \cdot (t / 8) + (t \% 8)) + m = 8^k \cdot t + m = n$
zbog induktivne hipoteze.

Dakle, dokazano je da izraz $t \cdot 8^k + m$ ne menja vrednost od prolaska do prolaska kroz petlju, odnosno da je on invarijanta petlje.

Da li algoritam terminira rad, tj. da li će u nekom trenutku biti $t = 0$?
Niz $t_k = t / 8$ je mnotono opadajući niz prirodnih brojeva, te je po algebarskom principu minimalnog elementa ograničen odozdo nulom.
Kako je posle poslednjeg prolaska kroz petlju $t = 0$, u tom trenutku će biti $m = n$, čime je korektnost algoritma dokazana.

3.
Postoji i optimalno i savršeno uparivanje: d->4<-b->1<-a->2<-c->3

POSTUPAK: Pretpostaviti da nema uparenih grana. Zato
1. Upariti a->1
2. kako nijedna grana nije uparena sa b, upariti b->1, vratite se na a i uparite sa 2, tj. b->1<-a->f
3. kako nema uparivanja za c, upariti c sa 2, vratiti se na a, upariti a sa e, vratiti se na b, upariti b sa 4, tj. c->2<-a->1<-b->4
4. kako ne postoji uparivanje za d, preslikati d u 4 i vratite se prethodnom putanjom, zatim preslikati c u 3, sto daje d->4<-b->1<-a->2<-c->3

Ovo uparivanje je savršeno.

4. Dokaz se zasniva na redukciji sa običnog problema pokrivač grana.
Neka je $G = (V,E)$ proizvoljni neusmereni graf. Neka je U skup čvorova neparnog stepena u G. Kako je ukupna suma stepena svih čvorova parana, to je i |U| paran broj (vidi sličan zadatak sa vežbi ili zadatak 6.16)
Uvedimo novi graf dodavanjem tri nova čvora x, y, i z, međusobno povezana u trougao. Dodatno, povežimo čvor x sa svim čvorovima iz U. Tako dobijamo novi graf G', čiji svi čvorovi imaju paran stepen (jer |U| je paran broj, te su parni brojevi i: d(x)=2+|U|, d(y)=2, d(z)=2, a svaki cvor neparnog stepena iz U je dobio +1 granu, te je i njihov stepen paran broj)

Dakle, pokazimo da ako graf G′ ima pokrivač grana, onda uklanjem nekih grana možemo dobiti i pokrivač za graf G.
Tvrđenje: Graf *G′* ima pokrivac grana velicine *k* ⇔ *G* ima pokrivac grana velicine *k* - 2.
<=:
od proizvoljnog pokrivača *G* veliqine *k*-2 se dodavanjem cvorova *x* i *y* dobija pokrivac grana grafa *G′* velicine *k*. Zato sto su novododate grane grafa G′ (tj. grane (x,y), (x,z), (y,z), (x,w) gde w je iz U) susedne čvorovima x, y.

=>: ako u *G′* postoji pokrivac grana velicine *k*, onda taj pokrivac mora da sadrzi bar dva od tri cvora *x*, *y* i *z* da bi bile pokrivene novododate grane (tj. grane (x,y), (x,z), (y,z), (x,w) gde w je iz U)
Tada je i skup od *k* čvorova koji se dobija zamenom ta dva čvora sa *x*, *y* takođe pokrivač grana *G′*
Pošto *x*, *y* ne pokrivaju ni jednu granu iz *G*, njihovim uklanjanjem iz skupa dobija se pokrivač grana grafa *G* veličine k-2.