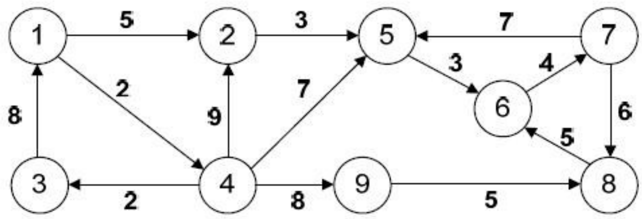
Primene računara, decembar 2009

1. Konstruisati algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog delioca dva broja i dokazati korektnost konstruisanog algoritma.
2. Napisati program u jeziku C, vremenske složenosti O(n) koji učitava sa standardnog ulaza niz realnih brojeva *a*, dimenzije *n* i pronalazi i ispisuje na standardni izlaz član niza čiji broj pojava u nizu je veći od *n/4* (ili poruku da takav član ne postoji). Dokazati da složenost algoritma je O(n).
3. Dat je na slici usmereni graf G = (V, E). Odrediti najkraće puteve od čvora *4* do svih ostalih čvorova u grafu.



4. Poznato je da je 2-SAT problem rešiv u polinomijalnom vremenu. Svesti 2-SAT problem na 4-SAT problem. Da li opisana redukcija problema znači da je i 4-SAT problem rešiv u polinomijalnom vremenu?

Rešenje:

1. jedan od algoritama sa dokazom korektnosti je rađen na V dvočasu vežbi i detaljno rešenje je na Web-u
2. Pogledati rešenje zadatka 5.37 iz udžbenika
3.

S		d								t							
		1	2	3	5	6	7	8	9	1	2	3	5	6	7	8	9
4	-	∞	9	2	7	∞	∞	∞	8	0	4	4	4	0	0	0	4
4,3	3	10	9	**2**	7	∞	∞	∞	8	3	4	4	4	0	0	0	4
4,3,5	5	10	9	**2**	**7**	10	∞	∞	8	3	4	4	4	5	0	0	4
4,3,5,9	9	10	9	**2**	**7**	10	∞	13	**8**	3	4	4	4	5	0	9	4
4,3,5,9,2	2	10	**9**	**2**	**7**	10	∞	13	**8**	3	4	4	4	5	0	9	4
4,3,5,9,2,1	1	**10**	**9**	**2**	**7**	10	∞	13	**8**	3	4	4	4	5	0	9	4
4,3,5,9,2,1,6	6	**10**	**9**	**2**	**7**	**10**	14	13	**8**	3	4	4	4	5	6	9	4
4,3,5,9,2,1,6,8	8	**10**	**9**	**2**	**7**	**10**	14	**13**	**8**	3	4	4	4	5	6	9	4
4,3,5,9,2,1,6,8,7	7	**10**	**9**	**2**	**7**	**10**	**14**	**13**	**8**	3	4	4	4	5	6	9	4

Neka je E proizvoljna instanca 2-SAT problema. Ona je oblika $E = E_1E_2...E_n$ pri čemu je svaki konjunkt, odnosno klauza E_i disjunkcija dva literala. Ideja je da svaku klauzu E_i zamenimo odredjenim brojem klauza takvih da svaka sadrži tačno četiri literala.

Neka je $E_i = x + y$ proizvoljna klauza iz E i neka je E' izraz dobijen iz izraza E tako što je klauza E_i zamenjena izrazom ${E_i}'$, gde je

$${E_i}' = (x + y + a + b)(x + y + a + \bar{b})(x + y + \bar{a} + b)(x + y + \bar{a} + \bar{b})$$

(a, b su nove promenljive tj. nisu sadržane u instanci E).

Treba dokazati: E je zadovoljiv akko je E' zadovoljiv.

($\Rightarrow$:) Ako je E zadovoljiv, onda po definiciji zadovoljivosti postoji interpretacija u kojoj je vrednost logičkog izraza E jednaka 1. Zbog osobine konjunkcije, to znači da je vrednost svake klauze E_j jednaka 1. Dakle, i vrednost uočene klauze E_i je 1, pa je vrednost bar jednog od literala x, y jednaka 1. Zato je vrednost ${E_i}'$ jednaka 1. To znači da je i E' zadovoljiv, jer je vrednost svih klauza u E' jednaka 1.

($\Leftarrow$:) Ako je E' zadovoljiv, onda po definiciji zadovoljivosti postoji interpretacija u kojoj je vrednost logičkog izraza E' jednaka 1. Zbog osobine konjunkcije, to znači da je vrednost svake klauze iz E' jednaka 1. Dakle, i vrednost klauze ${E_i}'$ je 1, pa je vrednost bar jednog od literala x, y jednaka 1. (U suprotnom, za $x = y = 0$ izraz ${E_i}'$ se svodi na izraz $(a + b)(a + \bar{b})(\bar{a} + b)(\bar{a} + \bar{b})$, koji je uvek netačan, a to je kontradikcija sa polaznom pretpostavkom.) Zato je vrednost E_i jednaka 1. To znači da je i E zadovoljiv, jer je vrednost svih klauza u E jednaka 1.

Kako je E_i proizvoljno izabrana klauza, ovaj postupak (kao i dokaz) možemo ponoviti za svako $i = \overline{1, n}$, pa je polazni izraz zadovoljiv akko je zadovoljiv dobijeni izraz, tj. polazni 2-SAT izraz je zadovoljiv akko je zadovoljiv 4-SAT izraz.

Opisana polinomijalna (svaka klauza se obilazi tačno jednom, i zamenjuje sa 4 nove klauze dužine 4) redukcija 2-SAT problema (koji je rešiv u polinomijalnom vremenu) na 4-SAT problem ne znači da je i 4-SAT problem rešiv u polinomijalnom vremenu. Štaviše, poznato je da je 4-SAT problem NP-kompletan. 4-SAT problem bi bio rešiv u polinomijalnom vremenu ako bismo uspeli da ga svedemo na 2-SAT problem u polinomijalnom vremenu.